練習問題解答例

＜第 8 章　放射伝熱＞

８．１　太陽の表面温度 6,000 K から放出される光の強度はいくらか。但し、太陽表面を黒体と仮定せよ。

解）ステファン・ボルツマンの法則（式(8.5)）を用いる。

$$E_b = \sigma T^4 = \left(5.67\times10^{-8}\right)(6000)^4 = 7.35\times10^7\ \mathrm{W/m^2}$$

８．２　無限に広い 1,000 K と 2,000 K の黒体平板が平行におかれている場合、この間で高温側から低温側に伝えられる正味の熱量の熱流束はいくらか。

解）式(8.21)を用いる。

$$q = \frac{Q}{A_1} = \sigma\left(T_1^{\,4} - T_2^{\,4}\right)F_{12} = \left(5.67\times10^{-8}\right)\left\{(2000)^4 - (1000)^4\right\}(1) = 8.51\times10^5\ \mathrm{W/m^2}$$

８．３　図 1 に示すような半径 r、高さ h=2 r の円筒形の容器がある。この底面を 1、上面を 2、側面 3 とするとき、各形態係数を求めよ。但し、図 2 のような二つの円が中心軸上に相対したときの形態係数は式(1)で表される。

$$F_{12} = \frac{1}{2r_1^{\,2}}\left\{h^2 + r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - \sqrt{\left(h^2 + r_1^{\,2} + r_2^{\,2}\right)^2 - 4r_1^{\,2}r_2^{\,2}}\right\} \qquad (1)$$

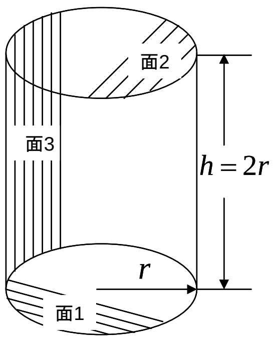

図 1

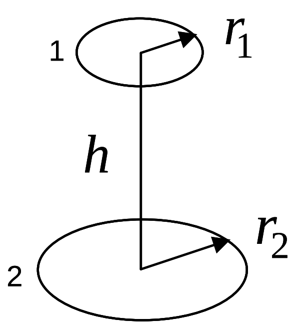

図 2

解）$r_1 = r_2 = r$ 、$h = 2r$ を与式に代入して

$$F_{12} = \frac{1}{2r^2}\left\{(2r)^2 + r^2 + r^2 - \sqrt{\left((2r)^2 + r^2 + r^2\right)^2 - 4r^2 r^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2r^2}\left\{6r^2 - \sqrt{\left(6r^2\right)^2 - 4r^4}\right\} = \frac{1}{2r^2}\left(6r^2 - \sqrt{32r^4}\right) = \frac{1}{2r^2}\left(6r^2 - 4\sqrt{2}r^2\right) = 3 - 2\sqrt{2}$$

対称性より、$F_{21} = F_{12} = 3 - 2\sqrt{2}$

平らな面は自分を見ることができないので、$F_{11} = F_{22} = 0$

総和関係より　$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 0 + 3 - 2\sqrt{2} + F_{13} = 1$ なので、$F_{13} = 2\sqrt{2} - 2$

対称性より、$F_{23} = F_{13} = 2\sqrt{2} - 2$

面積 $A_1 = A_2 = \pi\ r^2$ 、$A_3 = (2\pi\ r)(2r) = 4\pi\ r^2$ なので、相互関係 $A_1F_{13} = A_3F_{31}$ より、

$$\left(\pi\ r^2\right)\left(2\sqrt{2} - 2\right) = \left(4\pi\ r^2\right)F_3$$

これを解いて、$F_{31} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ 。

対称性より、$F_{32} = F_{31} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$

総和関係より　$F_{31} + F_{32} + F_{33} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} + \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} + F_{33} = 1$ なので、$F_{33} = 2 - \sqrt{2}$

８.４　半径 200 mm、長さ 300 mm の円管内面が T_1=1,100 K に保たれている。円管両端は T_2=298 K の外界に開いている。円管内面は黒体であるとして、円管内面から外界への放射による伝熱量を求めよ。ただし、形態係数は問８.３の式(1)を用いて計算せよ。

解）問８.３と同じ面の記号を用いる。

$$F_{12} = \frac{1}{2(0.2)^2}\left\{(0.3)^2 + (0.2)^2 + (0.2)^2 - \sqrt{\left((0.3)^2 + (0.2)^2 + (0.2)^2\right)^2 - 4(0.2)^2(0.2)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{0.08}\left\{0.17 - \sqrt{(0.17)^2 - 0.0064}\right\} = \frac{1}{0.08}\left(0.17 - \sqrt{0.0225}\right) = \frac{1}{0.08}(0.17 - 0.15) = 0.25$$

対称性より、$F_{21} = F_{12} = 0.25$

平らな面は自分を見ることができないので、$F_{11} = F_{22} = 0$

総和関係より、$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 0 + 0.25 + F_{13} = 1$ なので、$F_{13} = 0.75$

対称性より、$F_{23} = F_{13} = 0.75$

面積 $A_1 = A_2 = \pi\ r^2 = (3.1416)(0.2)^2 = 0.126\ \ \mathrm{m}^2$、

$A_3 = (2\pi\ r)(h) = (2)(3.1416)(0.2)(0.3) = 0.377\ \ \mathrm{m}^2$

なので、相互関係 $A_1F_{13} = A_3F_{31}$ より、

$(0.126)(0.75) = (0.377)F_{31}$

これを解いて、$F_{31} = 0.25$。

対称性より、$F_{32} = F_{31} = 0.25$

よって、円管内面である面３から面１への正味の放射伝熱量は式(8.23)から

$Q = \sigma(T_3{}^4 - T_1{}^4)A_3F_{31} = (5.67\times10^{-8})(1100^4 - 298^4)(0.377)(0.25) = 7.78\times10^3\,\mathrm{W}$

対称性から面２への放射伝熱量もこれに等しいので、求める円管内面から外界への放射による伝熱量は、

$2Q = (2)(7.78\times10^3) = 1.56\times10^4\,\mathrm{W} = 15.6\ \ \mathrm{kW}$

８．５　温度 600K の物体から 0.8kW/m² の熱放射が生じている。この物体の放射率はいくらであるか。

解）式(8.6)より

$$\varepsilon = \frac{E}{\sigma T^4} = \frac{0.8\times10^3}{(5.67\times10^{-8})(600)^4} = 0.109$$

８．６　温度 600K、放射率 0.5 の灰色体表面から放射される放射エネルギーの表面での放射強度はいくらであるか。

解）式(8.6)を変形して

$$E = \varepsilon\sigma T^4 = (0.5)(5.67\times10^{-8})(600)^4 = 3.67\times10^3\ \mathrm{W/m^2} = 3.67\ \ \mathrm{kW/m^2}$$

８．７　無限に広い 1,000 K の放射率 0.5 の灰色面と 2,000 K の放射率 0.8 の灰色面が平行に置かれている場合、この間で高温側から低温側に伝えられる正味の熱量の熱流束はいくらか。

解）式(8.36)を用いる。

$$q = \frac{Q}{A} = \sigma\left(T_1{}^4 - T_2{}^4\right)\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1} = \left(5.67\times10^{-8}\right)\left\{(2000)^4-(1000)^4\right\}\frac{1}{\dfrac{1}{0.8}+\dfrac{1}{0.5}-1} = 3.78\times10^5\,\mathrm{W/m^2}$$

８．８　非常に大きな２枚の平行平板の一方が 100℃、放射率 0.3、他方が 25℃、放射率 0.1 のとき、平板の単位面積あたり放射で伝わる熱量を求めよ。

解）式(8.36)を用いる。

$$q = \frac{Q}{A} = \sigma\left(T_1{}^4 - T_2{}^4\right)\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1} = \left(5.67\times10^{-8}\right)\left\{(100+273.15)^4-(25+273.15)^4\right\}\frac{1}{\dfrac{1}{0.3}+\dfrac{1}{0.1}-1}$$

$$= 52.8\ \ \mathrm{W/m^2}$$

８．９　研磨したアルミニウム板２枚がその寸法に比べ十分に小さい間隔で平行に置かれている。一方の板の温度を 700 K、他方の板の温度を 500 K とする。このときの正味の伝熱量を求めよ。また、一方の板または両平板とも黒体とすれば伝熱量はどうなるか。

解）付録の表１０より、研磨アルミニウム板の放射率を 0.05 とする。式(8.36)を用いる。

$$q = \frac{Q}{A} = \sigma\left(T_1{}^4 - T_2{}^4\right)\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1} = \left(5.67\times10^{-8}\right)\left\{(700)^4-(500)^4\right\}\frac{1}{\dfrac{1}{0.05}+\dfrac{1}{0.05}-1} = 258\ \ \mathrm{W/m^2}$$

一方の板が黒体の場合

$$q=\frac{Q}{A}=\sigma\left(T_1{}^4-T_2{}^4\right)\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1}=\left(5.67\times10^{-8}\right)\left\{(700)^4-(500)^4\right\}\frac{1}{\dfrac{1}{0.05}+\dfrac{1}{1}-1}=503\ \ \mathrm{W/m^2}$$

両平板とも黒体の場合

$$q=\frac{Q}{A}=\sigma\left(T_1{}^4-T_2{}^4\right)\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1}=\left(5.67\times10^{-8}\right)\left\{(700)^4-(500)^4\right\}\frac{1}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}-1}$$

$$=1.01\times10^4\,\mathrm{W/m^2}=10.1\ \ \mathrm{kW/m^2}$$

８．１０　図 8.7 中の直交長方形平板において a = 4 m、b = 4 m、c = 2 m となる炉床と側壁がある。炉床の温度が 800K、側壁が 500K であり、両面とも黒体であるとき、正味の伝熱量を求めよ。

解）$a/c = 2,\ b/c = 2$ なので、図 8.7 より $F = 0.15$。よって、式(8.23)より、炉床から側壁への正味の伝熱量は、

$$Q=\sigma\left(T_1{}^4-T_2{}^4\right)A_1F_{12}=\left(5.67\times10^{-8}\right)\left(800^4-500^4\right)(4)(2)(0.15)=2.36\times10^4\,\mathrm{W}$$

ただし、相関関係を用いている。側壁は 4 面あるので、求める伝熱量は、

$$4Q=(4)\left(2.36\times10^4\right)=9.45\times10^4\,\mathrm{W}=94.5\ \ \mathrm{kW}$$

８．１１　3 m × 3 m の 2 枚の平行板が 3 m 離れて置かれている。一方は 500 K、他方の板は 300 K に保たれていて、二つの板の放射率はそれぞれ 0.2 および 0.05 である。正味の伝熱量を求めよ。

解）図 8.6 で $a/c = b/c = 1.0$ の場合に相当するので、$F_{12} = 0.2$。式(8.34)を用いる。

$$Q=\frac{\sigma\left(T_1{}^4-T_2{}^4\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1A_1}+\dfrac{1}{A_1F_{12}}+\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2A_2}}=\frac{\left(5.67\times10^{-8}\right)\left(500^4-300^4\right)}{\dfrac{1-0.2}{(0.2)(3)(3)}+\dfrac{1}{(3)(3)(0.2)}+\dfrac{1-0.05}{(0.05)(3)(3)}}=991\ \mathrm{W}$$

８．１２　温度 T_1、表面積 A_1 の凸面ないし平面 1 の周囲を、温度 T_2、表面積 A_2 の面 2 が取り囲んでいるとき、面 1 の熱流束は式(2)で表される。

$$q_1 = \varepsilon_1 \sigma \left(T_1^{\ 4} - T_2^{\ 4} \right) \frac{1}{1 + \varepsilon_1 \left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \dfrac{A_1}{A_2}} \qquad (2)$$

直径 200 mm、温度 100℃、放射率 0.4 の円筒を、直径 220 mm、温度 20℃、放射率 0.2 の外筒が取り囲んでいるとき、円筒の単位長さあたりの外筒へ伝わる熱量を求めよ。

解）与式を用いて、この時の熱流束は、

$$q_1 = (0.4)\left(5.67 \times 10^{-8}\right)\left\{(100 + 273.15)^4 - (20 + 273.15)^4\right\} \frac{1}{1 + 0.4\left(\dfrac{1}{0.2} - 1\right)\dfrac{(3.14)(200)}{(3.14)(2\ \ 2)\ 0}} = 1\ \ 1\ \ \mathrm{W} / \mathrm{m}^2$$

８.１３　温度 T_A と T_B ($T_A > T_B$)の 2 枚の平板の間を真空にし、n 枚の薄い箔を平行に入れる。このとき平板 A から平板 B へ伝わる熱量を求めよ。ただし、平板および箔は黒体とする。

解）面積が与えられていないので、単位面積当たりの伝熱量（熱流束）について考える。i 枚目のはくの温度を T_i とすると、i 枚目のはくから $i+1$ 枚目のはくに伝わる熱量は、

$$q = \sigma\left(T_i^{\ 4} - T_{i+1}^{\ 4}\right)$$

隣り合うはくの間で伝わる熱量は等しく、求める熱量に等しいので、

$$q = \sigma\left(T_A^{\ 4} - T_1^{\ 4}\right)$$
$$q = \sigma\left(T_1^{\ 4} - T_2^{\ 4}\right)$$
$$\cdots$$
$$q = \sigma\left(T_n^{\ 4} - T_B^{\ 4}\right)$$

これらの式の両辺をそれぞれ足すと、

$$(n+1)q = \sigma\left(T_A^{\ 4} - T_B^{\ 4}\right)$$

よって、求める熱量は、

$$q = \frac{1}{n+1}\sigma\left(T_A^{\ 4} - T_B^{\ 4}\right)$$

８.１４　1,300℃の炎が 800℃で放射率 0.7 の周囲壁に伝える放射伝熱量はいくらか。ただし、炎の壁を見る角関係は 1、壁の面積は 300 cm²、炎は黒体とする。

解）角関係とは形態係数のこと（主に化学工学分野で用いる呼び方）。角関係が 1 なので炎は壁に完全に囲まれている。式(8.41)を用いる。

$$300\ \mathrm{cm}^2 = 0.03\ \mathrm{m}^2$$

$$Q = \varepsilon_w \sigma \left(T_g{}^4 - T_w{}^4 \right) A = (0.7)\left(5.67 \times 10^{-8}\right)\left\{(1300 + 273)^4 - (800 + 273)^4\right\}(0.03) = 5710\ \mathrm{W}$$