

<第5章 自然対流>

5.1 式(5.6)~(5.8)を用いて、式(5.3)~(5.5)から式(5.9)~(5.11)を導出せよ。

解) もとの式は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (5.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0: u=0, \quad v=0, \quad T=T_w \\ y=\infty: u=0, \quad T=T_\infty \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

用いる変数は、

$$\eta = \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4} \frac{y}{x^{1/4}} = c \frac{y}{x^{1/4}} \quad (\text{e5.1-1})$$

$$\psi = 4\nu c x^{3/4} f(\eta) \quad (\text{e5.1-2})$$

$$\Theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (\text{e5.1-3})$$

ここで、

$$c = \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4} \quad (\text{e5.1-4})$$

より

$$g\beta(T_w - T_\infty) = 4\nu^2 c^4 \quad (\text{e5.1-5})$$

$$g\beta(T - T_\infty) = g\beta(T_w - T_\infty)\Theta = 4\nu^2 c^4 \Theta \quad (\text{e5.1-6})$$

に注意しておく。

最初に相似変数の偏微分を求めておく。

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = (-1/4)c \frac{y}{x^{5/4}} = \frac{-cy}{4x^{5/4}} \quad (\text{e5.1-7})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{c}{x^{1/4}} \quad (\text{e5.1-8})$$

流れ関数の定義より、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 4\nu c x^{3/4} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4\nu c x^{3/4} \frac{df}{d\eta} \left(\frac{c}{x^{1/4}} \right) = 4\nu c^2 x^{1/2} \frac{df}{d\eta} \quad (\text{e5.1-9})$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(\frac{3\nu c}{x^{1/4}} f + 4\nu c x^{3/4} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -\left(\frac{3\nu c}{x^{1/4}} f + 4\nu c x^{3/4} \frac{df}{d\eta} \left(\frac{-cy}{4x^{5/4}} \right) \right) \\ &= -\left(\frac{3\nu c}{x^{1/4}} f - \frac{\nu c^2 y}{x^{1/2}} \frac{df}{d\eta} \right) = -\frac{3\nu c}{x^{1/4}} f + \frac{\nu c^2 y}{x^{1/2}} \frac{df}{d\eta} \end{aligned} \quad (\text{e5.1-10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(4\nu c^2 x^{1/2} \frac{df}{d\eta} \right) = 2\nu c^2 x^{-1/2} \frac{df}{d\eta} + 4\nu c^2 x^{1/2} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= 2\nu c^2 x^{-1/2} \frac{df}{d\eta} + 4\nu c^2 x^{1/2} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \left(\frac{-cy}{4x^{5/4}} \right) \\ &= 2\nu c^2 x^{-1/2} \frac{df}{d\eta} - \nu c^3 x^{-3/4} y \frac{d^2 f}{d\eta^2} \end{aligned} \quad (\text{e5.1-11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(4\nu c^2 x^{1/2} \frac{df}{d\eta} \right) = 4\nu c^2 x^{1/2} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4\nu c^2 x^{1/2} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \left(\frac{c}{x^{1/4}} \right) \\ &= 4\nu c^3 x^{1/4} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \end{aligned} \quad (\text{e5.1-12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(4\nu c^3 x^{1/4} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) = 4\nu c^3 x^{1/4} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4\nu c^3 x^{1/4} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \left(\frac{c}{x^{1/4}} \right) \\ &= 4\nu c^4 \frac{d^3 f}{d\eta^3} \end{aligned} \quad (\text{e5.1-13})$$

また、式(5.8)より、

$$T - T_\infty = (T_w - T_\infty) \Theta \quad (\text{e5.1-14})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_w - T_\infty) \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = (T_w - T_\infty) \frac{d\Theta}{d\eta} \left(\frac{-cy}{4x^{5/4}} \right) = \frac{-(T_w - T_\infty)cy}{4x^{5/4}} \frac{d\Theta}{d\eta} \quad (\text{e5.1-15})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (T_w - T_\infty) \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_w - T_\infty) \frac{d\Theta}{d\eta} \left(\frac{c}{x^{1/4}} \right) = \frac{(T_w - T_\infty)c}{x^{1/4}} \frac{d\Theta}{d\eta} \quad (\text{e5.1-16})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(T_w - T_\infty)c}{x^{1/4}} \frac{d\Theta}{d\eta} \right) = \frac{(T_w - T_\infty)c}{x^{1/4}} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(T_w - T_\infty)c}{x^{1/4}} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} \left(\frac{c}{x^{1/4}} \right) = \frac{(T_w - T_\infty)c^2}{x^{1/2}} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} \quad (\text{e5.1-17})$$

これらを式(5.3)に代入して、

$$\begin{aligned} & \left(4\nu c^2 x^{1/2} \frac{df}{d\eta} \right) \left(2\nu c^2 x^{-1/2} \frac{df}{d\eta} - \nu c^3 x^{-3/4} y \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) + \left(-\frac{3\nu c}{x^{1/4}} f + \frac{\nu c^2 y}{x^{1/2}} \frac{df}{d\eta} \right) \left(4\nu c^3 x^{1/4} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) \\ &= \nu \left(4\nu c^4 \frac{d^3 f}{d\eta^3} \right) + 4\nu^2 c^4 \Theta \end{aligned} \quad (\text{e5.1-18})$$

$$\begin{aligned} & \cancel{8\nu^2 c^4 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 - 4\nu^2 c^5 x^{-1/4} y \frac{df}{d\eta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} - 12\nu^2 c^4 f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + 4\nu^2 c^5 x^{-1/4} y \frac{df}{d\eta} \frac{d^2 f}{d\eta^2}} \\ &= 4\nu^2 c^4 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + 4\nu^2 c^4 \Theta \end{aligned} \quad (\text{e5.1-19})$$

$$8\nu^2 c^4 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 - 12\nu^2 c^4 f \frac{d^2 f}{d\eta^2} - 4\nu^2 c^4 \frac{d^3 f}{d\eta^3} - 4\nu^2 c^4 \Theta = 0 \quad (\text{e5.1-20})$$

$$2 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 - 3f \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \frac{d^3 f}{d\eta^3} - \Theta = 0 \quad (\text{e5.1-21})$$

両辺を-1倍して整理すれば、式(5.9)が得られる。

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + 3f \frac{d^2 f}{d\eta^2} - 2 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 + \Theta = 0 \quad (5.9)$$

が得られる。

また、式(5.4)に代入すれば、

$$\left(4\nu c^2 x^{1/2} \frac{df}{d\eta} \right) \left(-\frac{(T_w - T_\infty)c y}{4x^{5/4}} \frac{d\Theta}{d\eta} \right) + \left(-\frac{3\nu c}{x^{1/4}} f + \frac{\nu c^2 y}{x^{1/2}} \frac{df}{d\eta} \right) \left(\frac{(T_w - T_\infty)c}{x^{1/4}} \frac{d\Theta}{d\eta} \right) = \alpha \left(\frac{(T_w - T_\infty)c^2}{x^{1/2}} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} \right) \quad (\text{e5.1-22})$$

$$\begin{aligned} & \cancel{\frac{-\nu c^3 (T_w - T_\infty) y}{x^{3/4}} \frac{df}{d\eta} \frac{d\Theta}{d\eta} - \frac{3\nu c^2 (T_w - T_\infty)}{x^{1/2}} f \frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{\nu c^3 (T_w - T_\infty) y}{x^{3/4}} \frac{df}{d\eta} \frac{d\Theta}{d\eta}} = \alpha \frac{c^2 (T_w - T_\infty)}{x^{1/2}} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} \\ & \frac{3\nu c^2 (T_w - T_\infty)}{x^{1/2}} f \frac{d\Theta}{d\eta} + \alpha \frac{c^2 (T_w - T_\infty)}{x^{1/2}} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{e5.1-23})$$

$$\text{両辺を } \alpha \frac{c^2(T_w - T_\infty)}{x^{1/2}} \text{ で割って、}$$

$$3 \frac{\nu}{\alpha} f \frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{d^2\Theta}{d\eta^2} = 0 \quad (\text{e5.1-24})$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{e5.1-25})$$

に注意して整理すれば、式(5.10)が得られる。

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + 3Pr f \frac{d\Theta}{d\eta} = 0 \quad (5.10)$$

境界条件については、式(e5.1-1)より、 $y=0$ では $\eta=0$ 。このとき任意の x で $u=0$ より式(e5-

1.9)から $\frac{df}{d\eta} = 0$ 。同様に式(e5.1-10)より、 $-\frac{3\nu}{x^{1/4}} f + \frac{\nu c^2 y}{x^{1/2}} \frac{df}{d\eta} = 0$ だが、 $\frac{df}{d\eta} = 0$ なので $f=0$ 。

さらに、式(e5-1.3)で $T=T_w$ とおいて、 $\Theta=1$ 。

また、同じく式(e5.1-1)より、 $y=\infty$ では $\eta=\infty$ 。このとき任意の x で $u=0$ より式(e5-1.9)か

ら $\frac{df}{d\eta} = 0$ 。さらに、式(e5-1.3)で $T=T_\infty$ とおいて、 $\Theta=0$ 。よって、式(5.11)が得られる。

5.2 水を張った水槽の一側面に 5 cm 四方の平板ヒータが埋め込まれている。水温 30℃ の時、このヒータに通電して表面温度を 70℃一定にした。ヒータから水への伝熱量はいくらになるか。

解) 教科書の式(5.18)を用いる。計算に用いる値は以下の通り。全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{代表長さ } l = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{重力加速度 } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{加熱面温度 } T_w = (70 + 273.15) \text{ K} = 343.15 \text{ K}$$

$$\text{加熱面から充分離れた所での流体温度 } T_\infty = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$$

物性値を計算する代表温度（膜温度） $T_f = \frac{343.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 323.15 \text{ K}$

323.15 K の体膨張係数 $\beta = 0.45 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

323.15 K の動粘性係数 $\nu = 0.555 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

よってグラスホフ数は、

$$Gr \equiv \frac{l^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(5 \times 10^{-2})^3 (9.81) (0.45 \times 10^{-3}) (343.15 - 303.15)}{(0.555 \times 10^{-6})^2} = 7.20 \times 10^7$$

323.15 K のプラントル数 $Pr = 3.57$

よってヌッセルト数は、

$$\begin{aligned} Nu &= 0.669 \left(\frac{Pr}{Pr + \sqrt{Pr} + 0.5} \right)^{1/4} (Gr Pr)^{1/4} \\ &= (0.669) \left(\frac{3.57}{3.57 + \sqrt{3.57} + 0.5} \right)^{1/4} \{(7.20 \times 10^7)(3.57)\}^{1/4} = 74.5 \end{aligned}$$

323.15 K の熱伝導率 $\lambda = 0.642 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

よって平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu \lambda}{l} = \frac{(74.5)(0.642)}{5 \times 10^{-2}} = 955 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

平均熱流束は、

$$q = h(T_w - T_\infty) = (955)(343.15 - 303.15) = 3.82 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$$

求める伝熱量は、

$$Q = qA = (3.82 \times 10^4)(5 \times 10^{-2})^2 = 95.5 \text{ W}$$

5.3 式(5.25)および式(5.26)を導出せよ。

解) もとの式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.2}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (5.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.4)$$

式(5.3)を $y=0$ から $y=\delta$ まで積分する。

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left\{ v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \right\} dy \quad (\text{e5.3.1})$$

$$\text{左辺} = \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$

$$= \int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) dy$$

式(5.2)より、 $-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ なので、

$$\text{上式} = \int_0^\delta \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \int_0^\delta \left(\frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} \right) dy + [uv]_0^\delta$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy + uv|_{y=\delta} - uv|_{y=0}$$

速度境界層の定義より、 $y=0$ で $u=0$ 、 $y=\delta$ でも $u=0$ なので、結局、

$$\text{式(e5.3.1)の左辺} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy$$

一方、

$$\text{式(e5.3.1)の右辺} = \int_0^\delta v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + \int_0^\delta g\beta(T - T_\infty) dy = \left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^\delta + \int_0^\delta g\beta(T - T_\infty) dy$$

$$= \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} - \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + \int_0^\delta g\beta(T - T_\infty) dy$$

このモデルでは $y=\delta$ で $\frac{du}{dy} = 0$ なので、結局、

$$= - \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + \int_0^\delta g \beta (T - T_\infty) dy$$

式(e5.3.1)の右辺

以上から、

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy = g \beta \int_0^\delta (T - T_\infty) dy - v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (5.26)$$

次に式(5.4)を $y=0$ から $y=\delta_t$ まで積分する。

$$\int_0^{\delta_t} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = \int_0^{\delta_t} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \quad (e5.3.2)$$

T_∞ は定数なので、 $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial y}$ に注意して

$$\int_0^{\delta_t} \left(u \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial x} + v \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial y} \right) dy = \int_0^{\delta_t} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \quad (e5.3.3)$$

$$\int_0^{\delta_t} u \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial x} dy + \int_0^{\delta_t} v \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial y} dy = \int_0^{\delta_t} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u(T - T_\infty) dy + [v(T - T_\infty)]_0^{\delta_t} = \left[\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right]_0^{\delta_t}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u(T - T_\infty) dy + (v(T - T_\infty))_{y=\delta_t} - (v(T - T_\infty))_{y=0} = \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=\delta_t} - \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

今、 $y=0$ では $v=0$ 、 $y=\delta_t$ では $T=T_\infty$ より左辺第2項と第3項は0、このモデルでは $y=\delta_t$

で $\frac{dT}{dy}=0$ なので右辺第1項も0となり、結局、

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} (T - T_\infty) u dy \right] = - \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (e5.3.4)$$

今、 $y=0$ の壁面では流速が0より熱伝導で熱が伝わるので、

$$q_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

この両辺を $c\rho$ で割って、 $\alpha = \lambda/c\rho$ を用いれば、

$$\frac{q_w}{c\rho} = \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

これと式(e5.3.4)から、

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} (T - T_\infty) u dy \right] = -\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{q_w}{c\rho} \quad (5.27)$$

5.4 式(5.29)の速度分布において速度が最大となる y/δ の値を求めよ。

解) $\frac{u}{u_0} = \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2$

$\eta = \frac{y}{\delta}$ とおくと、

$$\frac{u}{u_0} = \eta(1-\eta)^2$$

$$u = u_0 \eta(1-\eta)^2$$

$$\frac{du}{d\eta} = u_0 \{ (1-\eta)^2 - 2\eta(1-\eta) \}$$

$$= u_0 (1 - 2\eta + \eta^2 - 2\eta + 2\eta^2)$$

$$= u_0 (3\eta^2 - 4\eta + 1)$$

$$= u_0 (3\eta - 1)(\eta - 1)$$

$$\frac{du}{d\eta} = 0$$

よって $\frac{du}{d\eta} = 0$ なる η は、

$$\eta = \frac{1}{3}, 1$$

このうち、題意を満たすのは、 $\eta = \frac{1}{3}$ 。

5.5 式(5.35), (5.36), (5.39)より式(5.40), (5.41)を導出せよ。

解) 式(5.35), (5.36)は以下の通り。

$$\frac{2m+n}{105} C_1^2 C_2 x^{2m+n-1} = \frac{C_2}{3} g\beta(T_w - T_\infty) x^n - \frac{C_1}{C_2} \nu x^{m-n} \quad (5.35)$$

$$\frac{m+n}{30} C_1 C_2 x^{m+n-1} = \frac{2\alpha}{C_2} x^{-n} \quad (5.36)$$

これらが恒等的に成立するには、 x の次数が両辺で一致する必要がある。よって、

$$2m+n-1=n=m-n \quad (\text{e5.5-1})$$

$$m+n-1=-n \quad (\text{e5.5-2})$$

式(e5.5-1)の最初の等号について、

$$2m+n-1=n \quad (\text{e5.5-3})$$

より、

$$2m-1=0 \quad (\text{e5.5-4})$$

$$m=\frac{1}{2} \quad (\text{e5.5-5})$$

これを式(e5.5-1)の次の等号に適用して、

$$n=\frac{1}{2}-n \quad (\text{e5.5-6})$$

$$n=\frac{1}{4} \quad (\text{e5.5-7})$$

式(e5.5-5), (e5.5-7)は次の通り式(e5.5-2)を満たす。

$$m+n-1=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)-1=-\frac{1}{4}=-n \quad (\text{e5.5-8})$$

(題意では、これを導出する必要はなく、これらの式が式(5.39)に相当。)

式(e5.5-5), (e5.5-7)を式(5.35)に代入して、

$$\frac{5/4}{105} C_1^2 C_2 x^{1/4} = \frac{C_2}{3} g\beta(T_w - T_\infty) x^{1/4} - \frac{C_1}{C_2} \nu x^{1/4} \quad (\text{e5.5-9})$$

$$\frac{1}{84} C_1^2 C_2 x^{1/4} = \frac{C_2}{3} g\beta(T_w - T_\infty) x^{1/4} - \frac{C_1}{C_2} \nu x^{1/4} \quad (\text{e5.5-10})$$

恒等式の両辺の係数は等しくなくてはならないので、

$$\frac{1}{84} C_1^2 C_2 = \frac{C_2}{3} g\beta(T_w - T_\infty) - \frac{C_1}{C_2} \nu \quad (\text{e5.5-11})$$

式(e5.5-5), (e5.5-7)を式(5.36)に代入して、

$$\frac{3/4}{30} C_1 C_2 x^{-1/4} = \frac{2\alpha}{C_2} x^{-1/4} \quad (\text{e5.5-12})$$

$$\frac{1}{40} C_1 C_2 x^{-1/4} = \frac{2\alpha}{C_2} x^{-1/4} \quad (\text{e5.5-13})$$

恒等式の両辺の係数は等しくなくてはならないので、

$$\frac{1}{40}C_1C_2 = \frac{2\alpha}{C_2} \quad (\text{e5.5-14})$$

$$C_1 = \frac{80\alpha}{C_2^2} \quad (\text{e5.5-15})$$

これを式(e5.5-11)に代入して

$$\frac{1}{84} \left(\frac{80\alpha}{C_2^2} \right)^2 C_2 = \frac{C_2}{3} g\beta(T_w - T_\infty) - \left(\frac{80\alpha}{C_2^2} \right) \frac{1}{C_2} \nu \quad (\text{e5.5-16})$$

$$\frac{1}{84} (80\alpha)^2 = \frac{C_2^4}{3} g\beta(T_w - T_\infty) - 80\alpha\nu \quad (\text{e5.5-17})$$

$$\frac{C_2^4}{3} g\beta(T_w - T_\infty) = \frac{1}{84} (80\alpha)^2 + 80\alpha\nu \quad (\text{e5.5-18})$$

$$28g\beta(T_w - T_\infty)C_2^4 = (80\alpha)^2 + (80)(84)\alpha\nu \quad (\text{e5.5-19})$$

$$7g\beta(T_w - T_\infty)C_2^4 = 80(20\alpha^2 + 21\alpha\nu) \quad (\text{e5.5-20})$$

$$C_2^4 = (20\alpha^2 + 21\alpha\nu) \frac{80}{7g\beta(T_w - T_\infty)} \quad (\text{e5.5-21})$$

$$C_2^4 = \frac{80}{7} (20\alpha^2 + 21\alpha\nu) \frac{1}{\nu^2} \frac{\nu^2}{g\beta(T_w - T_\infty)} \quad (\text{e5.5-22})$$

$$C_2^4 = \frac{(80)(21)}{7} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right) \frac{\alpha^2}{\nu^2} \frac{\nu^2}{g\beta(T_w - T_\infty)} \quad (\text{e5.5-23})$$

$$C_2^4 = 240 \left(\frac{20}{21} + Pr \right) Pr^{-2} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-1} \quad (\text{e5.5-24})$$

$$C_2^4 = 240 Pr^{-2} \left(Pr + \frac{20}{21} \right) \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-1} \quad (\text{e5.5-25})$$

$$C_2 = \sqrt[4]{240} Pr^{-1/2} \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{1/4} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-1/4} \quad (\text{e5.5-26})$$

$$C_2 = (3.935979\dots) Pr^{-1/2} \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{1/4} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-1/4} \quad (\text{e5.5-27})$$

式(5.41)が導かれた。

これを式(e5.5-15)に代入して

$$C_1 = 80\alpha \left\{ (3.935979\dots) Pr^{-1/2} \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{1/4} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-1/4} \right\}^{-2} \quad (\text{e5.5-28})$$

$$C_1 = 80\alpha (3.935979\dots)^{-2} Pr \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{-1/2} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{1/2} \quad (\text{e5.5-29})$$

$$C_1 = (5.163977\dots)(\alpha Pr) \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{-1/2} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{1/2} \quad (\text{e5.5-30})$$

$$C_1 = (5.163977\dots)\nu \left(Pr + \frac{20}{21} \right)^{-1/2} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{1/2} \quad (\text{e5.5-31})$$

式(5.40)が導かれた。

5.6 水を張った水槽の一側面に幅 5 cm、深さ方向の長さ 40 cm の平板ヒータが埋め込まれている。水温 30℃の時、このヒータに通電して表面温度を 70℃一定にした。完全な乱流熱伝達となるのはヒータ下端からどれだけの位置からと考えられるか。

解) 関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{重力加速度 } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{加熱面温度 } T_w = (70 + 273.15) \text{ K} = 343.15 \text{ K}$$

$$\text{加熱面から充分離れた所での流体温度 } T_\infty = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$$

$$\text{物性値を計算する代表温度 (膜温度)} \quad T_f = \frac{343.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 323.15 \text{ K}$$

$$323.15 \text{ K の体膨張係数 } \beta = 0.45 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$323.15 \text{ K の動粘性係数 } \nu = 0.555 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

よってヒータ下端からの距離が x の部分における局所グラスホフ数は、

$$Gr_x \equiv \frac{x^3 g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{x^3 (9.81) (0.45 \times 10^{-3}) (343.15 - 303.15)}{(0.555 \times 10^{-6})^2} = 5.733 \times 10^{11} x^3$$

323.15 K のプラントル数 $Pr = 3.57$

よってレイリー数は、

$$Ra_x = Gr_x Pr = (5.733 \times 10^1 x^3)(3.57) = 2.047 \times 10^1 x^3$$

これが 2×10^9 で完全に乱流に移行するので、

$$2.047 \times 10^{12} x^3 = 2 \times 10^9$$

を解いて、

$$x = 0.0992 \text{ m} = 9.92 \text{ cm}$$

5.7 高さ 2 m の平滑なガラス面が 100℃に加熱され、気温 20℃の空气中に垂直置かれている。伝熱量を求めよ。

解) 幅が与えられていないので、幅 1 m 当たりについて考える。

関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

代表長さ $l = 2 \text{ m}$

重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

加熱面温度 $T_w = (100 + 273.15) \text{ K} = 373.15 \text{ K}$

加熱面から充分離れた所での流体温度 $T_\infty = (20 + 273.15) \text{ K} = 293.15 \text{ K}$

物性値を計算する代表温度 (膜温度) $T_f = \frac{373.15 + 293.15}{2} \text{ K} = 333.15 \text{ K}$

空気の体膨張係数は絶対温度の逆数なので、333.15 K の体膨張係数

$$\beta = \frac{1}{333.15} = 3.002 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

333.15 K の動粘性係数 $\nu_m = 18.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

293.15 K の動粘性係数 $\nu_\infty = 15.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

373.15 K の動粘性係数 $\nu_w = 22.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

よってグラスホフ数は、

$$Gr \equiv \frac{l^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(2)^3 (9.81) (3.002 \times 10^{-3}) (373.15 - 293.15)}{(18.8 \times 10^{-6})^2} = 5.309 \times 10^{10}$$

323.15 K のプラントル数 $Pr = 0.708$

よってレイリー数は、

$$Ra = GrPr = (5.309 \times 10^{10}) (0.708) = 3.759 \times 10^{10} > 10^9$$

よって式(5.49)が適用できるので、

$$\begin{aligned} Nu &= 0.0185 \left(\frac{\nu_w}{\nu_\infty} \right)^{-0.21} (Gr Pr)^{2/5} \\ &= (0.0185) \left(\frac{22.9 \times 10^{-6}}{15.0 \times 10^{-6}} \right)^{-0.21} (3.759 \times 10^{10})^{2/5} = 287.3 \end{aligned}$$

333.15 K の熱伝導率 $\lambda = 0.02846 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

よって平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu \lambda}{l} = \frac{(287.3)(0.02846)}{2} = 4.089 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$$

平均熱流束は、

$$q = h(T_w - T_\infty) = (4.089)(373.15 - 293.15) = 3.271 \times 10^2 \text{ W m}^{-2}$$

求める伝熱量は、

$$Q = qA = (3.271 \times 10^2)(2) = 6.54 \times 10^2 \text{ W/m} = 654 \text{ W/m}$$

5.8 水を張った水槽の底面に 5 cm 四方の平板ヒータが埋め込まれている。水温 30℃ のとき、このヒータに通電して表面温度を 70℃ 一定にした。ヒータから水への伝熱量はいくらになるか。

解) 関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{代表長さ } l = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{重力加速度 } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{加熱面温度 } T_w = (70 + 273.15) \text{ K} = 343.15 \text{ K}$$

$$\text{加熱面から充分離れた所での流体温度 } T_\infty = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$$

物性値を計算する代表温度（膜温度） $T_f = \frac{343.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 323.15 \text{ K}$

323.15 K の体膨張係数 $\beta = 0.45 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

323.15 K の動粘性係数 $\nu = 0.555 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

よってグラスホフ数は、

$$Gr = \frac{l^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(5 \times 10^{-2})^3 (9.81) (0.45 \times 10^{-3}) (343.15 - 303.15)}{(0.555 \times 10^{-6})^2} = 7.20 \times 10^7$$

323.15 K のプラントル数 $Pr = 3.57$

よってレイリー数は、

$$Ra = Gr Pr = (7.20 \times 10^7) (3.57) = 2.57 \times 10^8 > 7 \times 10^6$$

よって式(5.50)が適用できるので、

$$\begin{aligned} Nu &= 0.15 (Gr Pr)^{1/3} \\ &= (0.15) (2.57 \times 10^8)^{1/3} = 95.4 \end{aligned}$$

323.15 K の熱伝導率 $\lambda = 0.642 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

よって平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu \lambda}{l} = \frac{(95.4) (0.642)}{5 \times 10^{-2}} = 1220 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

平均熱流束は、

$$q = h(T_w - T_\infty) = (1220) (343.15 - 303.15) = 4.88 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$$

求める伝熱量は、

$$Q = qA = (4.88 \times 10^4) (5 \times 10^{-2})^2 = 122 \text{ W}$$

5.9 一辺が 20 cm の立方体の容器に 100℃の熱湯が入っている。いま、表面温度 100℃、大気温度 15℃として、側面から自然対流により失われる熱量を求めよ。ただし、上下面よりの伝熱量は無視する。

解) まずレイリー数を計算して層流か乱流かを確認する。関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

一辺の長さ $l = 0.2 \text{ m}$

壁表面温度 $T_w = 373 \text{ K}$

大気温度 $T_\infty = 288 \text{ K}$

重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

物性値を決める時の膜温度 T_f は、

$$T_f = \frac{373 + 288}{2} = 330.5 \text{ K} = 57.5^\circ\text{C}$$

膜温度における物性値を物性値表から求める。

$$\text{動粘性係数 } \nu = \left\{ 0.185 + (0.238 - 0.185) \frac{57.5 - 50}{100 - 50} \right\} \times 10^{-4} = 1.93 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{プラントル数 } Pr = 0.708 + (0.708 - 0.708) \frac{57.5 - 50}{100 - 50} = 0.708$$

$$\text{熱伝導率 } \lambda = 0.0278 + (0.0311 - 0.0278) \frac{57.5 - 50}{100 - 50} = 2.83 \times 10^{-2} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

また、気体の体膨張係数 β は絶対温度の逆数なので

$$\beta = \frac{1}{330.5} = 3.02 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

よってグラスホフ数 Gr は、

$$Gr = \frac{l^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(0.2)^3 (9.81) (3.02 \times 10^{-3}) (373 - 288)}{(1.93 \times 10^{-5})^2} = 5.42 \times 10^7$$

レイリー数 Ra は

$$Ra = Gr Pr = (5.42 \times 10^7) (0.708) = 3.84 \times 10^7 < 2 \times 10^9$$

以上より層流なので式(5.18)を用いる。ヌセルト数 Nu は

$$Nu = 0.669 \left(\frac{Pr}{Pr + \sqrt{Pr} + 0.5} \right)^{1/4} (Gr Pr)^{1/4} = 0.669 \left(\frac{0.708}{0.708 + \sqrt{0.708} + 0.5} \right)^{1/4} (3.84 \times 10^7)^{1/4} = 40.4$$

熱伝達率 h は

$$h = \frac{Nu \lambda}{l} = \frac{(40.4) (2.83 \times 10^{-2})}{(0.2)} = 5.71 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$$

熱流束 q は

$$q = h(T_s - T_\infty) = (5.71) (373 - 288) = 485 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$$

一つの側面から放出される熱量 Q は

$$Q = q l^2 = (485) (0.2)^2 = 19.4 \text{ W}$$

側面は4つあるので総放熱量は

$$4Q = (4) (19.4) = 77.7 \text{ W}$$

5.10 温度 30℃の水の中に、一様温度 70℃の平板が鉛直に置かれ、自由対流によって

熱伝達が行われている。この平板の下端から 1 cm の位置における温度境界層の厚さと最大速度を求めよ。但し、温度境界層と速度境界層の厚さは等しいものとする。

解) 関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{代表長さ } l = 1 \text{ cm} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{重力加速度 } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{加熱面温度 } T_w = (70 + 273.15) \text{ K} = 343.15 \text{ K}$$

$$\text{加熱面から充分離れた所での流体温度 } T_\infty = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$$

$$\text{物性値を計算する代表温度 (膜温度) } T_f = \frac{343.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 323.15 \text{ K}$$

$$323.15 \text{ K の体膨張係数 } \beta = 0.45 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$323.15 \text{ K の動粘性係数 } \nu = 0.555 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

よってグラスホフ数は、

$$Gr \equiv \frac{l^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(1 \times 10^{-2})^3 (9.81) (0.45 \times 10^{-3}) (343.15 - 303.15)}{(0.555 \times 10^{-6})^2} = 5.733 \times 10^5$$

$$323.15 \text{ K のプラントル数 } Pr = 3.57$$

よってレイリー数は、

$$Ra = Gr Pr = (7.20 \times 10^7) (3.57) = 2.047 \times 10^6 < 5 \times 10^8$$

よって層流域なので式(5.42)と式(5.43)を適用する。

$$\frac{u_0 x}{\nu} = 5.164 (Pr + 0.952)^{-1/2} Gr_x^{1/2} \quad (5.42)$$

より、

$$\begin{aligned} u_0 &= 5.164 (Pr + 0.952)^{-1/2} Gr_x^{1/2} \left(\frac{\nu}{x} \right) \\ &= 5.164 (3.57 + 0.952)^{-1/2} (5.733 \times 10^5)^{1/2} \left(\frac{0.555 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-2}} \right) = 0.102 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{x} = 3.936 Pr^{-1/2} (Pr + 0.952)^{1/4} Gr_x^{-1/4} \quad (5.43)$$

より、

$$\begin{aligned}\delta &= 3.936 Pr^{-1/2} (Pr + 0.952)^{1/4} Gr_x^{-1/4} x \\ &= 3.936 (3.57)^{-1/2} (3.57 + 0.952)^{1/4} (5.733 \times 10^5)^{-1/4} (1 \times 10^{-2}) = 1.104 \times 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$

これが求める境界層の厚みである。

問 5.4 より最大速度は $y/\delta = 1/3$ で得られる。式(5.29)にこれを代入して、

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{1}{3}\right) \left\{1 - \frac{1}{3}\right\}^2 = \frac{4}{27}$$

よって求める最大速度は

$$u_{\max} = \frac{4}{27} u_0 = \frac{4}{27} (0.102) = 0.0151 \text{ m/s} = 1.51 \text{ cm/s}$$

5.1.1 水を張った水槽の中に直径 **5 cm** の球状ヒータが挿入されている。水温 **30℃** のとき、このヒータに通電して表面温度を **70℃** 一定にした。ヒータから水への伝熱量はいくらになるか。

解) 関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{代表長さ } d = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{重力加速度 } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{加熱面温度 } T_w = (70 + 273.15) \text{ K} = 343.15 \text{ K}$$

$$\text{加熱面から充分離れた所での流体温度 } T_\infty = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$$

$$\text{物性値を計算する代表温度 (膜温度)} \quad T_f = \frac{343.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 323.15 \text{ K}$$

$$323.15 \text{ K の体膨張係数 } \beta = 0.45 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$323.15 \text{ K の動粘性係数 } \nu = 0.555 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

よってグラスホフ数は、

$$Gr_d \equiv \frac{d^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(5 \times 10^{-2})^3 (9.81) (0.45 \times 10^{-3}) (343.15 - 303.15)}{(0.555 \times 10^{-6})^2} = 7.20 \times 10^7$$

323.15 K のプラントル数 $Pr = 3.57$

よってレイリー数は、

$$Ra = GrPr = (7.20 \times 10^7)(3.57) = 2.57 \times 10^8 > 10^7$$

よって乱流域を含むと考えられ、式(5.53)を適用する。

$$\begin{aligned} Nu_d &= 0.125(Gr_d Pr)^{1/3} \\ &= (0.125)(2.57 \times 10^8)^{1/3} = 79.5 \end{aligned}$$

323.15 K の熱伝導率 $\lambda = 0.641 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

よって平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu_d \lambda}{d} = \frac{(79.5)(0.641)}{5 \times 10^{-2}} = 1019 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$$

平均熱流束は、

$$q = h(T_w - T_\infty) = (1019)(343.15 - 303.15) = 4.08 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$$

求める伝熱量は、

$$Q = qA = (4.08 \times 10^4)(3.14)(5 \times 10^{-2})^2 = 320 \text{ W}$$

5.12 一定温度 70℃に保たれた直径 0.02 m の水平円管の外表面で水を加熱したい。管から十分離れたところの水の温度が 20℃の場合における管の表面平均熱伝達率を求めよ。

解) 関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{代表長さ } d = 0.02 \text{ m} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{重力加速度 } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{加熱面温度 } T_w = (70 + 273.15) \text{ K} = 343.15 \text{ K}$$

$$\text{加熱面から充分離れた所での流体温度 } T_\infty = (20 + 273.15) \text{ K} = 293.15 \text{ K}$$

$$\text{物性値を計算する代表温度 (膜温度) } T_f = \frac{343.15 + 293.15}{2} \text{ K} = 318.15 \text{ K}$$

$$318.15 \text{ K の体膨張係数 } \beta = 0.415 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$318.15 \text{ K の動粘性係数 } \nu = 0.606 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

よってグラスホフ数は、

$$Gr_d \equiv \frac{d^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(2 \times 10^{-2})^3 (9.81) (0.415 \times 10^{-3}) (343.15 - 293.15)}{(0.606 \times 10^{-6})^2} = 4.44 \times 10^6$$

318.15 K のプラントル数 $Pr = 3.96$

よってレイリー数は、

$$Ra = GrPr = (4.44 \times 10^6)(3.96) = 1.76 \times 10^7$$

式(5.51)を適用して、

$$\begin{aligned} Nu &= 0.669C \left(\frac{Pr}{Pr + \sqrt{Pr} + 0.5} \right)^{1/4} (Gr_d Pr)^{1/4} \\ &= (0.669)(0.773) \left(\frac{3.96}{3.96 + \sqrt{3.96} + 0.5} \right)^{1/4} \{ (4.44 \times 10^6)(3.96) \}^{1/4} = 29.6 \end{aligned}$$

318.15 K の熱伝導率 $\lambda = 0.635 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

よって求める平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu\lambda}{l} = \frac{(29.6)(0.635)}{2 \times 10^{-2}} = 940 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$$

5.13 直径 10 cm、長さ 3 m の水平円柱からの自由対流による伝熱量を求めよ。この場合、円柱の表面温度および周囲の空気温度はそれぞれ 90℃および 20℃とする。

解) 関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

直径 $d = 0.10 \text{ m} = 1 \times 10^{-1} \text{ m}$

長さ $l = 3 \text{ m}$

重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

加熱面温度 $T_w = (90 + 273.15) \text{ K} = 363.15 \text{ K}$

加熱面から充分離れた所での流体温度 $T_\infty = (20 + 273.15) \text{ K} = 293.15 \text{ K}$

物性値を計算する代表温度 (膜温度) $T_f = \frac{363.15 + 293.15}{2} \text{ K} = 328.15 \text{ K}$

328.15 K の体膨張係数は気体の場合絶対温度の逆数 $\beta = \frac{1}{328.15 \text{ K}} = 3.05 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

328.15 K の動粘性係数 $\nu = \left\{ 17.6 + (55 - 50) \frac{22.9 - 17.6}{100 - 50} \right\} \times 10^{-6} = 18.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

よってグラスホフ数は、

$$Gr_d = \frac{d^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(1 \times 10^{-1})^3 (9.81) (3.05 \times 10^{-3}) (363.15 - 293.15)}{(18.1 \times 10^{-6})^2} = 6.39 \times 10^6$$

328.15 K のプラントル数 $Pr = 0.708 + (55 - 50) \frac{0.708 - 0.708}{100 - 50} = 0.708$

よってレイリー数は、 $Ra = GrPr = (6.39 \times 10^6) (0.708) = 4.53 \times 10^6$

これより層流なので、式(5.51)を適用して、

$$Nu_d = (0.669)(0.773) \left(\frac{0.708}{0.708 + \sqrt{0.708 + 0.5}} \right)^{1/4} (4.53 \times 10^6)^{1/4} = 18.3$$

328.15 K の熱伝導率

$$\lambda = 27.8 + (55 - 50) \frac{31.1 - 27.8}{100 - 50} = 28.1 \text{ mW m}^{-1} \text{ K}^{-1} = 28.1 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

よって平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu \lambda}{l} = \frac{(18.3)(28.1 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-1}} = 5.14 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

平均熱流束は、

$$q = h(T_w - T_\infty) = (5.14)(363.15 - 293.15) = 3.60 \times 10^2 \text{ W m}^{-2}$$

求める伝熱量は、

$$\dot{Q} = q(\pi d l) = (3.60 \times 10^2)(3.1416)(1 \times 10^{-1})(3) = 3.40 \times 10^2 \text{ W} = 340 \text{ W}$$

5.14 90℃の熱湯に入ればやけどしてしまうが、同じ温度の乾いた空気で満たされているサウナ風呂に入ってもやけどしない。これを伝熱量の観点から考察するため、人間の体を直径 20cm、長さ 160cm、表面温度 30℃の水平円柱とし、伝熱量を計算せよ。

解) 熱湯の場合

関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{直径 } d = 0.20 \text{ m} = 2 \times 10^{-1} \text{ m}$$

$$\text{長さ } l = 160 \text{ cm} = 1.6 \text{ m}$$

重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

加熱面温度 $T_w = (90 + 273.15) \text{ K} = 363.15 \text{ K}$

加熱面から充分離れた所での流体温度 $T_\infty = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$

物性値を計算する代表温度（膜温度） $T_f = \frac{363.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 338.15 \text{ K}$

333.15 K の体膨張係数 $\beta = 0.540 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

333.15 K の動粘性係数 $\nu = 0.474 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

363.15 K の動粘性係数 $\nu = 0.326 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

303.15 K の動粘性係数 $\nu = 0.801 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

よってグラスホフ数は、

$$Gr_d \equiv \frac{d^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(2 \times 10^{-1})^3 (9.81) (0.540 \times 10^{-3}) (363.15 - 303.15)}{(0.474 \times 10^{-6})^2} = 1.13 \times 10^{10}$$

333.15 K のプラントル数 $Pr = 3.00$

よってレイリー数は、

$$Ra = GrPr = (1.13 \times 10^{10}) (3.00) = 3.39 \times 10^{10} > 10^9$$

式(5.49)を適用して、

$$\begin{aligned} Nu &= (0.0185) \left(\frac{\nu_w}{\nu_\infty} \right)^{-0.21} (GrPr)^{2/5} \\ &= (0.0185) \left(\frac{0.326 \times 10^{-6}}{0.801 \times 10^{-6}} \right)^{-0.21} \{ (1.13 \times 10^{10}) (3.00) \}^{2/5} = 364 \end{aligned}$$

333.15 K の熱伝導率 $\lambda = 0.651 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

よって平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu \lambda}{l} = \frac{(364) (0.651)}{2 \times 10^{-1}} = 1.18 \times 10^3 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

平均熱流束は、

$$q = h(T_w - T_\infty) = (1.18 \times 10^3) (363.15 - 303.15) = 7.11 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$$

求める伝熱量は、

$$\dot{Q} = q(\pi dl) = (7.11 \times 10^4) (3.1416) (2 \times 10^{-1}) (1.6) = 7.14 \times 10^4 \text{ W} = 71.4 \text{ kW}$$

空気の場合

関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{直径 } d = 0.20 \text{ m} = 2 \times 10^{-1} \text{ m}$$

$$\text{長さ } l = 160 \text{ cm} = 1.6 \text{ m}$$

$$\text{重力加速度 } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{加熱面温度 } T_w = (90 + 273.15) \text{ K} = 363.15 \text{ K}$$

$$\text{加熱面から充分離れた所での流体温度 } T_\infty = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$$

$$\text{物性値を計算する代表温度 (膜温度) } T_f = \frac{363.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 333.15 \text{ K}$$

気体の体膨張係数 β は絶対温度の逆数なので 333.15 K の体膨張係数は

$$\beta = \frac{1}{333.15} = 3.02 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$\beta = 0.540 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$333.15 \text{ K の動粘性係数 } \nu = 1.87 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$363.15 \text{ K の動粘性係数 } \nu = 0.326 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$303.15 \text{ K の動粘性係数 } \nu = 0.801 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

よってグラスホフ数は、

$$Gr_d \equiv \frac{d^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} = \frac{(2 \times 10^{-1})^3 (9.81) (3.02 \times 10^{-3}) (363.15 - 303.15)}{(1.87 \times 10^{-5})^2} = 4.06 \times 10^7$$

$$333.15 \text{ K のプラントル数 } Pr = 0.708$$

よってレイリー数は、

$$Ra = Gr Pr = (4.06 \times 10^7) (0.708) = 2.87 \times 10^7 < 5 \times 10^8$$

式(5.18)を適用して、

$$Nu = 0.669 \left(\frac{Pr}{Pr + \sqrt{Pr} + 0.5} \right)^{1/4} (GrPr)^{1/4} = (0.669) \left(\frac{0.708}{0.708 + \sqrt{0.708} + 0.5} \right)^{1/4} (2.87 \times 10^7)^{1/4} = 37.6$$

333.15 K の熱伝導率 $\lambda = 2.85 \times 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

よって平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu\lambda}{l} = \frac{(37.6)(2.85 \times 10^{-2})}{2 \times 10^{-1}} = 5.34 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

平均熱流束は、

$$q = h(T_w - T_\infty) = (5.34)(363.15 - 303.15) = 321 \text{ W m}^{-2}$$

求める伝熱量は、

$$\dot{Q} = q(\pi dl) = (321)(3.1416)(2 \times 10^{-1})(1.6) = 3.22 \times 10^2 \text{ W} = 322 \text{ W}$$

よって、空気の場合には水の場合の 0.45% しか熱が伝わらない。

5.15 底面が一辺 5 cm の正方形、深さが 60 cm の水の満たされた直方体の垂直密閉層において一つの側面を 90℃、向かい合う側面を 30℃、残りの面を断熱面とした。この場合の伝熱量はいくらになるか。

解) 関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{平板間距離 } L = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{垂直壁高さ } H = 60 \text{ cm} = 6 \times 10^{-1} \text{ m}$$

$$\text{アスペクト比 } A = L/H = 5 \times 10^{-2} / 6 \times 10^{-1} = 1$$

$$\text{重力加速度 } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{加熱壁温度 } T_1 = (90 + 273.15) \text{ K} = 363.15 \text{ K}$$

$$\text{冷却壁温度 } T_2 = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$$

$$\text{物性値を計算する代表温度 (膜温度)} \quad T_f = \frac{363.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 333.15 \text{ K}$$

333.15 K の体膨張係数 $\beta = 0.54 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

333.15 K の動粘性係数 $\nu = 0.480 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

333.15 K の温度伝導率 $\alpha = 1.59 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

よってレイリー数は、

$$Ra_L \equiv \frac{L^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\alpha \nu} = \frac{(5 \times 10^{-2})^3 (9.81) (0.54 \times 10^{-3}) (363.15 - 303.15)}{(1.59 \times 10^{-7}) (0.480 \times 10^{-6})} = 5.20 \times 10^8$$

333.15 K のプラントル数 $Pr = 3.02$

よって式(5.59)が適用できるので、

$$\begin{aligned} Nu_L &= 0.046 (Ra_L)^{1/3} \\ &= (0.046) (5.20 \times 10^8)^{1/3} = 37.0 \end{aligned}$$

333.15 K の熱伝導率 $\lambda = 0.654 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

よって平均熱伝達率は、

$$h = \frac{Nu_L \lambda}{L} = \frac{(37.0) (0.654)}{5 \times 10^{-2}} = 484 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

平均熱流束は、

$$q = h(T_1 - T_2) = (484) (363.15 - 303.15) = 2.90 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$$

求める伝熱量は、

$$Q = qA = (2.90 \times 10^4) (5 \times 10^{-2}) (6 \times 10^{-1}) = 871 \text{ W}$$

5.16 水を密閉した垂直密閉層において加熱壁を 70℃、冷却壁を 30℃とすると、その伝熱が熱伝導支配であるためには、平板間の距離はいくら以下でなければならないか。

解) 関連する値を全て S I 単位系の基本単位で表しておく。

重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

加熱壁温度 $T_1 = (70 + 273.15) \text{ K} = 343.15 \text{ K}$

冷却壁温度 $T_2 = (30 + 273.15) \text{ K} = 303.15 \text{ K}$

物性値を計算する代表温度（膜温度） $T_f = \frac{333.15 + 303.15}{2} \text{ K} = 323.15 \text{ K}$

323.15 K の体膨張係数 $\beta = 4.50 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

323.15 K の動粘性係数 $\nu = 5.54 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

323.15 K の熱伝導率 $\lambda = 6.41 \times 10^{-1} \text{ W/m K}$

323.15 K の比熱 $c = 4.18 \times 10^3 \text{ J/kg K}$

323.15 K の密度 $\rho = 9.88 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$

323.15 K の温度伝導率 $\alpha \equiv \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{6.41 \times 10^{-1}}{(4.18 \times 10^3)(9.88 \times 10^2)} = 1.55 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

平板間距離が L の時のレイリー数は、

$$Ra_L \equiv \frac{L^3 g \beta (T_1 - T_2)}{\alpha \nu} = \frac{L^3 (9.81) (4.5 \times 10^{-4}) (343.15 - 303.15)}{(1.55 \times 10^{-7}) (5.54 \times 10^{-7})} = 2.06 \times 10^{12} L^3$$

これが 10^3 よりも小さいことが求められるので、

$$2.06 \times 10^{12} L^3 < 10^3$$

これを解いて

$$L < 7.86 \times 10^{-4} \text{ m} = 786 \mu\text{m}。$$