

＜第4章 強制対流熱伝達＞

4.1 式(4.9)を導出せよ。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (4.6)$$

を変換する。最初に $\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}$ の微分値を整理しておく。

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} y \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \quad (4.A1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} y \right) = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \quad (4.A2)$$

これを用いて、 $\psi = \sqrt{\nu u_\infty x} f(\eta)$ の微分値を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu u_\infty x} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu u_\infty x} \right) f + \sqrt{\nu u_\infty x} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu u_\infty x^{\frac{1}{2}}} \right) f + \sqrt{\nu u_\infty x} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \sqrt{\nu u_\infty} \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) f + \sqrt{\nu u_\infty x} \frac{df}{d\eta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\nu u_\infty} x^{-\frac{1}{2}} f - \frac{1}{2} u_\infty x^{-1} y \frac{df}{d\eta} \quad (4.A3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\nu u_\infty x} f = \sqrt{\nu u_\infty x} \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{\nu u_\infty x} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu u_\infty x} \frac{df}{d\eta} \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) = u_\infty \frac{df}{d\eta} \quad (4.A4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_\infty \frac{df}{d\eta} \right) = u_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{d\eta} \right) = u_\infty \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\infty \frac{d^2 f}{d\eta^2} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (4.A5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(u_\infty \frac{df}{d\eta} \right) = u_\infty \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{df}{d\eta} \right) = u_\infty \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\infty \frac{d^2 f}{d\eta^2} \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \\
&\quad (4.A6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) = \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) = \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{u_\infty^2}{\nu} x^{-1} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \quad (4.A7)
\end{aligned}$$

これらの微分値を式(4.6)に代入する。

$$\begin{aligned}
&\left(u_\infty \frac{df}{d\eta} \right) \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{\nu u_\infty} x^{-\frac{1}{2}} f - \frac{1}{2} u_\infty x^{-1} y \frac{df}{d\eta} \right) \left(\sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) \\
&= \nu \frac{u_\infty^2}{\nu} x^{-1} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \quad (4.A8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(u_\infty \frac{df}{d\eta} \right) \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\nu u_\infty} x^{-\frac{1}{2}} f \left(\sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2} u_\infty x^{-1} y \frac{df}{d\eta} \left(\sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) = \nu \frac{u_\infty^2}{\nu} x^{-1} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \quad (4.A9)
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty^5}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \left(\frac{df}{d\eta} \right) \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) - \frac{1}{2} u_\infty^2 x^{-1} f \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_{\infty}^5}{\nu}}x^{-\frac{3}{2}}y\frac{df}{d\eta}\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)=u_{\infty}^2x^{-1}\frac{d^3f}{d\eta^3} \quad (4.A10)$$

$$-\frac{1}{2}u_{\infty}^2x^{-1}f\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)=u_{\infty}^2x^{-1}\frac{d^3f}{d\eta^3} \quad (4.A11)$$

$$-\frac{1}{2}f\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)=\frac{d^3f}{d\eta^3} \quad (4.A12)$$

$$\frac{d^3f}{d\eta^3}+\frac{1}{2}f\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)=0 \quad (4.9)$$

4.2 薄い平板が温度 20℃で常圧の水の一樣な流れの中に平行に置かれている。流速は 0.5 m/s であり、平板の寸法は流れ方向、直角方向ともに 50 cm である。このときの板の中心における速度境界層の厚さと、板全面に働く摩擦力を求めよ。

解) 式(4.13)を用いる。関係する数値を S I 単位の基本単位とその組み立て単位で表しておく。

$$\text{バルク流速} \quad u_{\infty}=0.5 \text{ m/s}$$

$$\text{平板の流れ方向の寸法} \quad L_x=0.5 \text{ m}$$

$$\text{平板の流れに直角な方向の寸法} \quad L_y=0.5 \text{ m}$$

$$\text{境界層の厚みを計算する位置} \quad x=\frac{L}{2}=\frac{0.5}{2}=0.25 \text{ m}$$

$$20^{\circ}\text{Cの水の動粘性係数} \quad \nu=1.004 \text{ mm}^2/\text{s}=1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$20^{\circ}\text{Cの水の粘性係数} \quad \mu=1.002 \text{ mPa}\cdot\text{s}=1.002 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

よって、求める速度境界層の厚みは

$$\delta=5\sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}}=5\sqrt{\frac{(1.004 \times 10^{-6})(0.25)}{(0.5)}}=3.54 \times 10^{-3} \text{ m}=3.54 \text{ mm}$$

また、剪断応力は式(4.16)を用いて

$$\tau_w = 0.332 \mu \frac{u_\infty}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = 0.332 \mu \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-1/2}$$

板全体での摩擦力は剪断力を板の面積に関して積分すればよいので

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{L_x} \tau_w L_y dx = \int_0^{L_x} 0.332 \mu \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} x^{-1/2} L_y dx = 0.332 \mu \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} L_y \int_0^{L_x} x^{-1/2} dx \\ &= 0.332 \mu \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} L_y \left[2x^{1/2} \right]_0^{L_x} = 0.664 \mu \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu}} L_y \sqrt{L_x} \\ &= (0.664) (1.002 \times 10^{-3}) \sqrt{\frac{(0.5)^3}{(1.004 \times 10^{-6})}} (0.5) \sqrt{0.5} = 8.30 \times 10^{-2} \text{ N} = 83.0 \text{ mN} \end{aligned}$$

4.3 30℃の空気が、温度 100℃、長さ 2 m の平板に沿って流速 10 m/s で流れている。層流から乱流への遷移レイノルズ数は 3.2×10^5 とする。このとき、平板単位幅あたりの空気へ伝わる熱量を求めよ。ただし、乱流部は以下の式を用いて計算せよ。

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{0.8} Pr^{1/3}$$

解) バルク温度は、

$$T_\infty = 30^\circ\text{C}$$

壁面温度は、

$$T_w = 100^\circ\text{C}$$

膜温度は

$$T_m = \frac{30+100}{2} = 65^\circ\text{C}$$

関連する物性値を S I 単位の基本単位で示しておく。

$$\text{バルク流速 } u_\infty = 10 \text{ m/s}$$

$$\text{板の長さ } L = 2 \text{ m}$$

65℃の空気の動粘性係数

$$\nu = 17.6 + (22.9 - 17.6) \frac{65 - 50}{100 - 50} = 19.19 \text{ mm}^2/\text{s} = 1.919 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

65℃の空気のプラントル数

$$Pr = 0.708 + (0.708 - 0.708) \frac{65 - 50}{100 - 50} = 0.708 = 7.08 \times 10^{-1}$$

65℃の空気の熱伝導率

$$\lambda = 27.8 + (31.1 - 27.8) \frac{65 - 50}{100 - 50} = 28.79 \text{ mW/(m K)} = 2.879 \times 10^{-2} \text{ W/(m K)}$$

乱流に遷移する位置を板の先端から x [m] とすれば、式(3.42)より

$$\frac{u_{\infty} x}{\nu} = \frac{(10)x}{1.919 \times 10^{-5}} = 3.2 \times 10^5$$

これを解いて

$$x = 6.141 \times 10^{-1} \text{ m}$$

層流部分の平均熱伝達率を求める。式(4.31)より、

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$h_x = 0.332 \frac{\lambda}{x} \left(\frac{u_{\infty} x}{\nu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} = 0.332 \lambda \left(\frac{u_{\infty}}{\nu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} x^{-1/2}$$

$$h = \frac{1}{x} \int_0^x h_x dx$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x 0.332 \lambda \left(\frac{u_{\infty}}{\nu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} x^{-1/2} dx$$

$$= 0.332 \lambda \left(\frac{u_{\infty}}{\nu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} \frac{1}{x} \int_0^x x^{-1/2} dx$$

$$= 0.332 \lambda \left(\frac{u_{\infty}}{\nu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} \frac{1}{x} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_0^x$$

$$= 0.664 \lambda \left(\frac{u_{\infty}}{\nu x} \right)^{1/2} Pr^{1/3}$$

よって層流部分の伝熱量は、

$$\begin{aligned} \dot{Q}_l &= -x \cdot 0.664 \lambda \left(\frac{u_{\infty}}{\nu x} \right)^{1/2} Pr^{1/3} (T_{\infty} - T_w) \\ &= -(6.141 \times 10^{-1}) (0.664) (2.879 \times 10^{-2}) \\ &\quad \times \left(\frac{10}{(1.919 \times 10^{-5}) (6.141 \times 10^{-1})} \right)^{1/2} (7.08 \times 10^{-1})^{1/3} (30 - 100) \end{aligned}$$

$$= 6.74 \text{ W}$$

乱流部分の平均熱伝達率を求める。問題の与式より、

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$$

$$h_x = 0.0296 \frac{\lambda}{x} \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} = 0.0296 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} x^{-1/5}$$

$$h = \frac{1}{L-x} \int_x^L h_x dx$$

$$= \frac{1}{L-x} \int_x^L 0.0296 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} x^{-1/5} dx$$

$$= 0.0296 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \frac{1}{L-x} \int_x^L x^{-1/5} dx$$

$$= 0.0296 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \frac{1}{L-x} \left[\frac{x^{4/5}}{4/5} \right]_x^L$$

$$= 0.0370 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \frac{1}{L-x} (L^{4/5} - x^{4/5})$$

よって乱流部分の伝熱量は、

$$\dot{Q}_t = -(L-x) \cdot 0.0370 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \frac{1}{L-x} (L^{4/5} - x^{4/5}) (T_\infty - T_w)$$

$$= -0.0370 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} (L^{4/5} - x^{4/5}) (T_\infty - T_w)$$

$$= -(0.0370) (2.879 \times 10^{-2}) \left(\frac{10}{1.919 \times 10^{-5}} \right)^{4/5}$$

$$\times (7.08 \times 10^{-1})^{1/3} \left\{ (2)^{4/5} - (6.141 \times 10^{-1})^{4/5} \right\} (30 - 100)$$

$$= 2649 \text{ W}$$

よって求める伝熱量は

$$\dot{Q}_l + \dot{Q}_t = 674.7 + 2649 = 3324 \text{ W} = 3.32 \text{ kW}$$

4.4 式(4.20)を導出せよ。

解) 無次元温度の定義は次の通り。

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (4.19)$$

ここで、 θ も η のみの関数であることを仮定する。

T についての微分値を整理する。式(4.19)より、

$$T = (T_\infty - T_w)\theta + T_w \quad (4.1.A28)$$

なので、

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_\infty - T_w) \frac{\partial \theta}{\partial x} = (T_\infty - T_w) \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = (T_\infty - T_w) \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \right) \quad (4.1.A29)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (T_\infty - T_w) \frac{\partial \theta}{\partial y} = (T_\infty - T_w) \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_\infty - T_w) \frac{d\theta}{d\eta} \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.1.A30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (T_\infty - T_w) \frac{d\theta}{d\eta} \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \right\} = (T_\infty - T_w) \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right) \\ &= (T_\infty - T_w) \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_\infty - T_w) \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= (T_\infty - T_w) \frac{u_\infty}{\nu x} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.1.A31) \end{aligned}$$

これらと式(4.11), (4.12)を式(4.3)に代入して

$$\begin{aligned}
& \left(u_{\infty} \frac{df}{d\eta} \right) (T_{\infty} - T_w) \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_{\infty}}{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right) (T_{\infty} - T_w) \frac{d\theta}{d\eta} \left(\sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \\
& = \alpha (T_{\infty} - T_w) \frac{u_{\infty}}{\nu X} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.1.A32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_{\infty}^3}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} y (T_{\infty} - T_w) \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{1}{2} u_{\infty} (T_{\infty} - T_w) x^{-1} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right) \frac{d\theta}{d\eta} \\
& = \alpha (T_{\infty} - T_w) \frac{u_{\infty}}{\nu X} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.1.A33)
\end{aligned}$$

両辺を $(T_{\infty} - T_w) \frac{u_{\infty}}{\nu X}$ で割って

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}} y \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{1}{2} \nu \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right) \frac{d\theta}{d\eta} = \alpha \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.1.A34)$$

$$-\frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{u_{\infty} x}{\nu}} \frac{y}{x} \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{1}{2} \nu \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} - \frac{1}{2} \nu f \frac{d\theta}{d\eta} = \alpha \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.1.A35)$$

ここで式(4.7)を第1項に代入。

$$-\frac{1}{2} \nu \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{1}{2} \nu \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} - \frac{1}{2} \nu f \frac{d\theta}{d\eta} = \alpha \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.1.A36)$$

$$-\frac{1}{2} \nu f \frac{d\theta}{d\eta} = \alpha \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.1.A37)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\nu}{\alpha} f \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.1.A38)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \frac{\nu}{\alpha} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (4.1.A39)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (4.20)$$

ここで

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (4.21)$$

4.5 式(4.33)を導出せよ。

解) $x = L$ までの平均熱伝達率は平均の定義から

$$h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad (4.32)$$

これに式(4.28)を代入して

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{L} \int_0^L 0.332 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} Pr^{1/3} dx = \frac{1}{L} 0.332 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} Pr^{1/3} \int_0^L x^{-1/2} dx \\ &= \frac{1}{L} 0.332 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} Pr^{1/3} \left[2x^{1/2} \right]_0^L = \frac{1}{L} 0.332 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} Pr^{1/3} (2L^{1/2}) = \frac{1}{L^{1/2}} 0.664 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} Pr^{1/3} \\ &= 0.664 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu L}} Pr^{1/3} \quad (4.33a) \end{aligned}$$

式(4.29)で $x = L$ とおけば

$$[h_x]_{x=L} = 0.332 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu L}} Pr^{1/3} \quad (4.1.A55)$$

なので、式(4.33a)と比較して

$$h = 0.664 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu L}} Pr^{1/3} = (2)(0.332) \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu L}} Pr^{1/3} = 2[h_x]_{x=L} \quad (4.33b)$$

4.6 式(4.54)を導出せよ。

解)

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} = 4.64095 \dots \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} \approx 4.64 \frac{1}{\sqrt{Re_x}} = 4.64 \frac{1}{Re_x^{1/2}} \quad (4.53)$$

$$\delta \approx 4.64 x \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}$$

これを式(4.51)に代入

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{4.64 x \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{4.64 x \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}} \right)^3$$

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_{\infty} x}{\nu}} = \frac{y}{x \sqrt{\frac{\nu}{u_{\infty} x}}}$$

ここで式(4.7)

を導入して

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{\eta}{4.64} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{4.64} \right)^3 = (0.32327 \dots) \eta - (5.0051 \dots \times 10^{-3}) \eta^3 \quad (4.54)$$

4.7 式(4.63)から式(4.71)までを導出せよ。

解) 境界条件 (式(4.64)) を満たし得る最も簡単な多項式である 3 次式を用いて

$$T = a' + b'y + c'y^2 + d'y^3 \quad (4.63)$$

と置く。

$y=0$ に関する境界条件は、壁面温度が T_w より

$$T = T_w \quad (4.64a)$$

式(4.3)に壁面上での速度ゼロである条件 $u=0$, $v=0$ を代入して

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.64b)$$

$y=\delta_t$ に関する境界条件は、バルク温度が T_{∞} より

$$T = T_{\infty} \quad (4.64c)$$

境界の外では温度一定より

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (4.64d)$$

式(4.63)より、

$$\frac{\partial T}{\partial y} = b' + 2c'y + 3d'y^2$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 2c' + 6d'y$$

これらを境界条件に代入して

$$T_w = a' + b'(0) + c'(0)^2 + d'(0)^3 = a'$$

$$0 = 2c' + 6d'(0) = 2c'$$

$$T_\infty = a' + b'\delta_t + c'\delta_t^2 + d'\delta_t^3$$

$$0 = b' + 2c'\delta_t + 3d'\delta_t^2$$

上2式より

$$a' = T_w$$

$$c' = 0$$

これを下2式に代入して

$$T_\infty = T_w + b'\delta_t + d'\delta_t^3$$

$$0 = b' + 3d'\delta_t^2$$

下側の式を δ_t 倍して上式から引くと

$$T_\infty = T_w - 2d'\delta_t^3$$

$$-\frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t^3} = d'$$

これを下式に代入

$$0 = b' + 3\left(-\frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t^3}\right)\delta_t^2$$

$$b' = 3\frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t}$$

これより温度分布は、

$$T = T_w + 3\frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t}y + (0)y^2 + \left(-\frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t^3}\right)y^3$$

$$T = T_w + 3\frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t}y + \left(-\frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t^3}\right)y^3$$

よって、温度境界層の厚み δ_t がわかれば温度分布がわかる。

また、これを変形して

$$T - T_w = 3 \frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t} y + \left(-\frac{T_\infty - T_w}{2\delta_t^3} \right) y^3$$

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3y}{2\delta_t} - \frac{y^3}{2\delta_t^3}$$

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \quad (4.65)$$

なお、教科書ではここで無次元温度 θ を導入しているが、実際には何にも使っておらず、不要。

式(4.62)に、式(4.51)と式(4.65)を代入する。式(4.51)より

$$u = u_\infty \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\}$$

今、 $\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$ より、

$$T - T_w = (T_\infty - T_w)\theta$$

$$T = T_w + (T_\infty - T_w)\theta$$

$$T = T_w + (T_\infty - T_w) \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\}$$

$$T_\infty - T = T_\infty - \left[T_w + (T_\infty - T_w) \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right]$$

$$= T_\infty - T_w - (T_\infty - T_w) \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\}$$

$$= (T_\infty - T_w) \left[1 - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right]$$

$$= (T_\infty - T_w) \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[T_w + (T_\infty - T_w) \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[(T_\infty - T_w) \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial (y/\delta_t)} \left[(T_\infty - T_w) \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right] \frac{\partial (y/\delta_t)}{\partial y}$$

$$= (T_\infty - T_w) \left\{ \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^2 \right\} \frac{1}{\delta_t}$$

$$= \frac{3}{2} (T_\infty - T_w) \left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^2 \right\} \frac{1}{\delta_t}$$

よって

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_t} (T_\infty - T_w) \left[1 - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right] u_\infty \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} dy \right)$$

$$= \alpha \left(\frac{3}{2} (T_\infty - T_w) \left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^2 \right\} \frac{1}{\delta_t} \right)_{y=0}$$

$$u_\infty (T_\infty - T_w) \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_t} \left[1 - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right] \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} dy \right)$$

$$= \frac{3}{2} (T_\infty - T_w) \alpha \left(\left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^2 \right\} \frac{1}{\delta_t} \right)_{y=0}$$

$$u_{\infty}(T_{\infty} - T_w) \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_t} \left[1 - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right] \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} dy \right) = \frac{3}{2} (T_{\infty} - T_w) \alpha \frac{1}{\delta_t}$$

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_t} \left[1 - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right\} \right] \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} dy \right) = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\delta_t}$$

ここで

$$\zeta = \frac{\delta_t}{\delta} \quad (4.66)$$

を導入する。

$$\delta_t = \zeta \delta$$

を代入して

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_t} \left[1 - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right)^3 \right\} \right] \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} dy \right) = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\zeta \delta}$$

積分の中を整理する。

$$\begin{aligned} & \left[1 - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right)^3 \right\} \right] \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} \\ &= \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right)^3 \right\} \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} \\ &= \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right) \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right)^3 \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right) \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right)^3 \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 - \left\{ \frac{9}{4\zeta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{4\zeta^3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 - \frac{3}{4\zeta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 + \frac{1}{4\zeta^3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right\} \\ &= \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 - \frac{9}{4\zeta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \frac{3}{4\zeta^3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 + \frac{3}{4\zeta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 - \frac{1}{4\zeta^3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \end{aligned}$$

よって、積分の部分は

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\delta_t} \left[1 - \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\zeta \delta} \right)^3 \right\} \right] \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} dy \\
&= \int_0^{\delta_t} \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 - \frac{9}{4\zeta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \frac{3}{4\zeta^3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 + \frac{3}{4\zeta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 - \frac{1}{4\zeta^3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right\} dy \\
&= \delta \left[\frac{3}{4} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 - \frac{3}{4\zeta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \frac{3}{20\zeta^3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^5 + \frac{3}{20\zeta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^5 - \frac{1}{28\zeta^3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^7 \right]_0^{\delta_t} \\
&= \delta \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{\delta_t}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta_t}{\delta} \right)^4 - \frac{3}{4\zeta} \left(\frac{\delta_t}{\delta} \right)^3 + \frac{3}{20\zeta^3} \left(\frac{\delta_t}{\delta} \right)^5 + \frac{3}{20\zeta} \left(\frac{\delta_t}{\delta} \right)^5 - \frac{1}{28\zeta^3} \left(\frac{\delta_t}{\delta} \right)^7 \right\} \\
&= \delta \left(\frac{3}{4} \zeta^2 - \frac{1}{8} \zeta^4 - \frac{3}{4\zeta} \zeta^3 + \frac{3}{20\zeta^3} \zeta^5 + \frac{3}{20\zeta} \zeta^5 - \frac{1}{28\zeta^3} \zeta^7 \right) \\
&= \delta \left(\frac{3}{4} \zeta^2 - \frac{1}{8} \zeta^4 - \frac{3}{4} \zeta^2 + \frac{3}{20} \zeta^2 + \frac{3}{20} \zeta^4 - \frac{1}{28} \zeta^4 \right) \\
&= \delta \left(\frac{3}{20} \zeta^2 - \frac{3}{280} \zeta^4 \right)
\end{aligned}$$

ここで $\zeta = \frac{\delta_t}{\delta}$ を用いている。

最終的に式(4.67)は

$$u_\infty \frac{d}{dx} \left\{ \delta \left(\frac{3}{20} \zeta^2 - \frac{3}{280} \zeta^4 \right) \right\} = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\delta \zeta}$$

となる。ここで、 $\zeta \ll 1$ を仮定すれば、 $\zeta^4 \ll \zeta^2$ より

$$u_\infty \frac{d}{dx} \left\{ \delta \left(\frac{3}{20} \zeta^2 \right) \right\} = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\delta \zeta}$$

とおけ、

$$\frac{3}{20} u_\infty \frac{d}{dx} (\delta \zeta^2) = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\delta \zeta} \quad (4.68)$$

が得られる。

速度境界層の厚み δ と x との関係は式(4.53)で求められている。式(4.53)を変形して

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

としてから代入して

$$\begin{aligned} \frac{3}{20} u_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}} \zeta^2 \right) &= \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}} \zeta} \\ \frac{3}{20} \sqrt{\frac{280}{13}} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{280}{13}} u_{\infty} \sqrt{\frac{\nu}{u_{\infty}}} \sqrt{\frac{\nu}{u_{\infty}}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x} \zeta^2) &= \frac{\alpha}{\sqrt{x} \zeta} \\ \frac{28}{13} \nu \frac{d}{dx} (\sqrt{x} \zeta^2) &= \frac{\alpha}{\sqrt{x} \zeta} \\ \frac{d}{dx} (\sqrt{x} \zeta^2) &= \frac{13}{28} \frac{\alpha}{\nu} \frac{1}{\sqrt{x} \zeta} \\ \frac{d}{dx} (\sqrt{x} \zeta^2) &= \frac{13}{28} \frac{1}{Pr} \frac{1}{\sqrt{x} \zeta} \\ \zeta^2 \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) + \sqrt{x} \frac{d}{dx} (\zeta^2) &= \frac{13}{28} \frac{1}{Pr} \frac{1}{\sqrt{x} \zeta} \\ \zeta^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \frac{d}{dx} (\zeta^2) &= \frac{13}{28} \frac{1}{Pr} \frac{1}{\sqrt{x} \zeta} \\ (\sqrt{x} \zeta) \zeta^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} + (\sqrt{x} \zeta) \sqrt{x} \frac{d}{dx} (\zeta^2) &= \frac{13}{28} \frac{1}{Pr} \\ \zeta^3 \frac{1}{2} + x \zeta \frac{d}{dx} (\zeta^2) &= \frac{13}{28} \frac{1}{Pr} \\ \zeta^3 + 2x \zeta \frac{d}{dx} (\zeta^2) &= \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \\ \zeta^3 + 4x \zeta^2 \frac{d}{dx} \zeta &= \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{d}{dx} (\zeta^3) = 3\zeta^2 \frac{d}{dx} \zeta$$

に注意して

$$\zeta^3 + \frac{4}{3} x \frac{d}{dx} (\zeta^3) = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \quad (4.69)$$

これは線形微分方程式である。

境界条件は、 $x = x_0$ から伝熱が始まるとして

$$x = x_0 : \quad \zeta = 0 \quad (4.70)$$

すなわち

$$x = x_0 : \quad \zeta^3 = 0$$

公式を用いるために微分方程式の両辺を $\frac{4}{3}x$ で割って

$$\frac{3}{4x} \zeta^3 + \frac{d}{dx}(\zeta^3) = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \left(\frac{3}{4x} \right)$$

$$\frac{d}{dx}(\zeta^3) + \frac{3}{4x} \zeta^3 = \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} \frac{1}{x}$$

線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ の一般解は $y = \exp\left(-\int P(x)dx\right) \left[\int \left\{ Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right) \right\} dx + C \right]$

ここで、 $y = \zeta^3$ 、 $P(x) = \frac{3}{4x}$ 、 $Q(x) = \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} \frac{1}{x}$ とおいて

$$\zeta^3 = \exp\left(-\int \frac{3}{4x} dx\right) \left[\int \left\{ \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} \frac{1}{x} \exp\left(\int \frac{3}{4x} dx\right) \right\} dx + C \right]$$

$$= \exp\left(-\frac{3}{4} \int \frac{1}{x} dx\right) \left[\frac{39}{56} \frac{1}{Pr} \int \left\{ \frac{1}{x} \exp\left(\frac{3}{4} \int \frac{1}{x} dx\right) \right\} dx + C \right]$$

$$= \exp\left(-\frac{3}{4} \ln x\right) \left[\frac{39}{56} \frac{1}{Pr} \int \left\{ \frac{1}{x} \exp\left(\frac{3}{4} \ln x\right) \right\} dx + C \right]$$

$$= \exp(\ln x^{-3/4}) \left[\frac{39}{56} \frac{1}{Pr} \int \left\{ \frac{1}{x} \exp(\ln x^{3/4}) \right\} dx + C \right]$$

$$= x^{-3/4} \left[\frac{39}{56} \frac{1}{Pr} \int \left\{ \frac{1}{x} (x^{3/4}) \right\} dx + C \right]$$

$$= x^{-3/4} \left[\frac{39}{56} \frac{1}{Pr} \int x^{-1/4} dx + C \right]$$

$$= \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} x^{-3/4} \left[\frac{4}{3} x^{3/4} + C \right]$$

$$= \frac{4}{3} x^{3/4} \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} x^{-3/4} + C \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} x^{-3/4}$$

$$= \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} + C \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} x^{-3/4}$$

境界条件を代入して

$$0 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} + C \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} x_0^{-3/4}$$

$$-\frac{13}{14} \frac{1}{Pr} = C \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} x_0^{-3/4}$$

$$C = -\frac{4}{3} x_0^{3/4}$$

よって

$$\zeta^3 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} - \frac{4}{3} x_0^{3/4} \frac{39}{56} \frac{1}{Pr} x^{-3/4}$$

$$= \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} - x_0^{3/4} \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} x^{-3/4}$$

$$= \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} - \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \frac{x_0^{3/4}}{x}$$

$$= \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \left(1 - \frac{x_0^{3/4}}{x} \right)$$

$$\zeta = \left\{ \frac{13}{14} \frac{1}{Pr} \left(1 - \frac{x_0^{3/4}}{x} \right) \right\}^{1/3}$$

$$= \left(\frac{13}{14} \right)^{1/3} Pr^{-1/3} \left(1 - \frac{x_0^{3/4}}{x} \right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{13}{14} \right)^{1/3} Pr^{-1/3} \left(1 - \frac{x_0^{3/4}}{x} \right)^{1/3}$$

$$= \frac{1}{1.02501 \dots} Pr^{-1/3} \left(1 - \frac{x_0^{3/4}}{x} \right)^{1/3} \quad (4.71)$$

4.8 壁温 50℃、内径 5 cm の円管内に入口温度 20℃の水をで 50 cm³/s で流す。入口から 20 cm の部分でのバルク温度はいくらか。ただし、熱伝達率の計算にはハウゼンの式を用いよ。

解) 関係する数値を S I 単位系の基本単位およびその組み合わせによる単位で表しておく。

壁温 $T_w = (50 + 273.15) \text{ K} = 323.15 \text{ K}$

内径 $d = 0.05 \text{ m}$

入口温度 $T_{b1} = (20 + 273.15) \text{ K} = 293.15 \text{ K}$

温度測定位置 $L = 0.2 \text{ m}$

体積流量 $v = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{s}$

20°Cのプラントル数 $Pr = 6.991$

20°Cの動粘性係数 $\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$

20°Cの熱伝導率 $\lambda = 0.5995 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$

20°Cの密度 $\rho = 998.2 \text{ kg m}^{-3}$

20°Cの定圧比熱 $c = 4.185 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

平均流速を求める。

$$u_m = \frac{v}{\pi d^2 / 4} = \frac{5 \times 10^{-5}}{\pi (0.05)^2 / 4} = 0.0255 \text{ m/s}$$

グレッツ数を求める。

$$Gz_L = \frac{Re_d Pr}{L/d} = \frac{\frac{u_m d}{\nu} Pr}{L/d} = \frac{u_m d^2 Pr}{\nu L} = \frac{(0.0255)(0.05)^2 (6.991)}{(1.004 \times 10^{-6})(0.2)} = 2.22 \times 10^3$$

これより、

$$Nu_d = \frac{3.65 + 0.0668 Gz_L}{1 + 0.04 Gz_L^{2/3}} = \frac{3.65 + (0.0668)(2.22 \times 10^3)}{1 + (0.04)(2.22 \times 10^3)^{2/3}} = 19.5$$

$$h = \frac{Nu_d \lambda}{d} = \frac{(19.5)(0.5995)}{(0.05)} = 233 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1}$$

伝わった熱が温度変化分に相当するので、

$$\pi d L h \Delta T_m = \frac{\pi d^2}{4} u \rho c (T_{b2} - T_{b1})$$

$$\pi d L h \Delta T_m = \frac{\pi d^2}{4} u \rho c \{(T_w - T_{b1}) - (T_w - T_{b2})\}$$

$$\pi d L h \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \Delta T_1 - \ln \Delta T_2} = \frac{\pi d^2}{4} u \rho c (\Delta T_1 - \Delta T_2)$$

$$\pi d L h \frac{4}{\pi d^2 u \rho c} = \ln \Delta T_1 - \ln \Delta T_2$$

$$\frac{4 L h}{d u \rho c} = \ln \Delta T_1 - \ln \Delta T_2$$

$$\ln \Delta T_2 = \ln \Delta T_1 - \frac{4 L h}{d u \rho c}$$

$$\Delta T_2 = \exp \left(\ln \Delta T_1 - \frac{4 L h}{d u \rho c} \right)$$

$$T_w - T_{b2} = \exp \left(\ln \Delta T_1 - \frac{4 L h}{d u \rho c} \right)$$

$$\begin{aligned} T_{b2} &= T_w - \exp \left(\ln \Delta T_1 - \frac{4 L h}{d u \rho c} \right) = T_w - \Delta T_1 \exp \left(- \frac{4 L h}{d u \rho c} \right) = T_w - (T_w - T_1) \exp \left(- \frac{4 L h}{d u \rho c} \right) \\ &= 323.15 - (323.15 - 293.15) \exp \left(- \frac{(4)(0.2)(233)}{(0.05)(0.0255)(998.2)(4.185 \times 10^3)} \right) = 323.2 \text{ K} \end{aligned}$$

なお、ここでは 20℃ の物性値を用いて計算したが、出口温度が比較的高いので、20℃ とこの温度の平均を用いて計算し直すことを繰り返す方が真の値に近づく。

4.9 内径 5 cm の円管内を 25℃ の水が平均流速 2 cm/s で流れているとき、入口から 20 cm における局所熱伝達率はいくらか。流れが十分に発達している場合の局所ヌッセルト数分布に関する図 4.8 を用いよ。

解) 関係する数値を S I 単位系の基本単位およびその組み合わせによる単位で表しておく。

内径 $d = 0.05 \text{ m}$

平均流速 $u_m = 0.02 \text{ m/s}$

熱伝達率決定位置 $x = 0.2 \text{ m}$

25℃ のプラントル数 $Pr = (6.991 + 5.419) / 2 = 6.205$

25℃ の動粘性係数 $\nu = (1.004 + 0.8008) \times 10^{-6} / 2 = 9.02 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

25℃ の熱伝導率 $\lambda = (0.5995 + 0.6150) / 2 = 0.6073 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

グレッツ数を求める。

$$Gz_x = \frac{Re_d Pr}{x/d} = \frac{\frac{u_m d}{\nu} Pr}{x/d} = \frac{u_m d^2 Pr}{\nu x} = \frac{(0.02)(0.05)^2(6.205)}{(9.02 \times 10^{-7})(0.2)} = 1.72 \times 10^3$$

$$\frac{1}{Gz_x} = 5.82 \times 10^{-4}$$

壁の条件が与えられていないので伝熱面温度一定を仮定して、図 4.8 より $Nu_{d,x} = 11$

よって局所熱伝達率は、

$$h_x = \frac{Nu_{d,x} \lambda}{d} = \frac{(11)(0.6073)}{(0.05)} = 134 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1}$$

4.10 式(4.161)より、平均のヌッセルト数を求めよ。

解) 平板の始まる部分においては層流であるはずなので、位置 x で乱流に遷移したとして、位置 L までの範囲の乱流部分の平均熱伝達率を求める。式(4.161)より、

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$$

$$h_x = 0.0296 \frac{\lambda}{x} \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} = 0.0296 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} x^{-1/5}$$

$$h = \frac{1}{L-x} \int_x^L h_x dx$$

$$= \frac{1}{L-x} \int_x^L 0.0296 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} x^{-1/5} dx$$

$$= 0.0296 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \frac{1}{L-x} \int_x^L x^{-1/5} dx$$

$$= 0.0296 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \frac{1}{L-x} \left[\frac{x^{4/5}}{4/5} \right]_x^L$$

$$= 0.0370 \lambda \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \frac{L^{4/5} - x^{4/5}}{L-x}$$

4.1.1 半径 R の円管内のある断面での速度分布、温度分布が次式で与えられる場合、そ

こでの平均流速 u_m と混合平均温度 T_b を求めよ。

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^4$$

解)

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

より

$$u = u_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\}$$

また、

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \quad \text{より}$$

$$T = T_w + (T_0 - T_w) \left\{ 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \right\}$$

定義より、平均流速 u_m は、

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{\int_0^R u 2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{\int_0^R u_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} 2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2\pi u_0 \int_0^R \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} r dr}{\pi R^2} = \frac{2\pi u_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr}{\pi R^2} \\ &= \frac{2\pi u_0}{\pi R^2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \frac{2\pi u_0}{\pi R^2} \frac{R^2}{4} = \frac{u_0}{2} \end{aligned}$$

混合平均温度 T_b は、

$$\begin{aligned}
T_b &= \frac{\int_0^R T 2\pi u dr}{\int_0^R 2\pi u dr} = \frac{\int_0^R \left[T_w + (T_0 - T_w) \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right\} \right] 2\pi u_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr}{\int_0^R 2\pi u_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr} \\
&= \frac{2\pi u_0 \int_0^R \left[T_w + (T_0 - T_w) \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right\} \right] r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr}{2\pi u_0 \int_0^R r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr} \\
&= \frac{2\pi u_0 \int_0^R T_w r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr}{2\pi u_0 \int_0^R r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr} + \frac{2\pi u_0 \int_0^R \left[(T_0 - T_w) \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right\} \right] r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr}{2\pi u_0 \int_0^R r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr} \\
&= \frac{T_w 2\pi u_0 \int_0^R r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr}{2\pi u_0 \int_0^R r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} dr} + \frac{2\pi u_0 (T_0 - T_w) \int_0^R \left[\left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right\} \right] \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr}{2\pi u_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr} \\
&= T_w + (T_0 - T_w) \frac{\int_0^R \left(1 - \frac{4}{3} \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{3} \frac{r^4}{R^4} \right) \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr}{\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr} \\
&= T_w + (T_0 - T_w) \frac{\int_0^R \left(r - \frac{4}{3} \frac{r^3}{R^2} + \frac{1}{3} \frac{r^5}{R^4} - \frac{r^3}{R^2} + \frac{4}{3} \frac{r^5}{R^4} - \frac{1}{3} \frac{r^7}{R^6} \right) dr}{\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr} \\
&= T_w + (T_0 - T_w) \frac{\frac{1}{3} \int_0^R \left(3r - 4 \frac{r^3}{R^2} + \frac{r^5}{R^4} - 3 \frac{r^3}{R^2} + 4 \frac{r^5}{R^4} - \frac{r^7}{R^6} \right) dr}{\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr} \\
&= T_w + (T_0 - T_w) \frac{\frac{1}{3} \int_0^R \left(3r - 7 \frac{r^3}{R^2} + 5 \frac{r^5}{R^4} - \frac{r^7}{R^6} \right) dr}{\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T_w + (T_0 - T_w) \frac{\frac{1}{3} \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{7r^4}{4R^2} + \frac{5r^6}{6R^4} - \frac{r^8}{8R^6} \right]_0^R}{\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R} \\
&= T_w + (T_0 - T_w) \frac{\frac{1}{3} \frac{36 - 42 + 20 - 3}{24} R^2}{\frac{1}{4} R^2} = T_w + (T_0 - T_w) \frac{\frac{1}{3} \frac{11}{24} R^2}{\frac{1}{4} R^2} = T_w + \frac{11}{18} (T_0 - T_w)
\end{aligned}$$

4.12 表面温度 50℃の直径 1 cm の球の周りを 5 cm/s で 20℃の水を流した場合の伝熱量はいくらか。

解) 式(4.166), (4.167)を用いる。

バルク温度 $T_\infty = 20^\circ\text{C}$

球表面温度 $T_w = 50^\circ\text{C}$

膜温度 $T_m = \frac{50 + 20}{2} = 35^\circ\text{C}$

計算に必要な値を S I 単位系の基本単位で表しておく。

球の直径 $d = 0.01 \text{ m}$

水の流速 $u = 0.05 \text{ m/s}$

35℃の水の動粘性係数

$$\nu = \frac{0.8008 + 0.6581}{2} \text{ mm}^2/\text{s} = 0.7295 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 7.295 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

35℃の水の熱伝導率

$$\lambda = \frac{0.6150 + 0.6286}{2} \text{ W/(m K)} = 0.6218 \text{ W/(m K)}$$

35℃の水のプラントル数

$$Pr = \frac{5.41 + 4.34}{2} = 4.88$$

レイノルズ数は

$$Re_d = \frac{(0.05)(0.01)}{(7.295 \times 10^{-7})} = 685.4$$

よって、式(4.167)を用いて、

$$Nu_d = 2 + 0.6Re_d^{1/2} Pr^{1/3} = 2 + 0.6(685.4)^{1/2} (4.880)^{1/3} = 28.64$$

熱伝達率は、

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.6218}{0.01} (28.64) = 1.781 \times 10^3 \text{ W/(m}^2 \text{K)}$$

熱流束は、

$$q = -h(T_\infty - T_w) = -(1.781 \times 10^3)(20 - 50) = 5.343 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$

伝熱量は

$$\dot{Q} = qA = q(\pi d^2) = (5.343 \times 10^4)(3.1416)(0.01)^2 = 16.8 \text{ W}$$

4.13 壁温 50℃、内径 5 cm の円管内に入口温度 20℃の水を 50 dm³/s で流す。入口から 20 cm におけるバルク温度はいくらか。ただし、熱伝達率の計算にはディッタス・ベルターの式を用いよ。

解) 代表温度として、壁温と入口温度の平均値を用いる。

$$\text{壁温度 } T_w = 50^\circ\text{C}$$

$$\text{入口温度 } T_0 = 20^\circ\text{C}$$

$$\text{代表温度 } T = \frac{50 + 20}{2} = 35^\circ\text{C}$$

計算に必要な値を S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{管内径 } d = 0.05 \text{ m}$$

$$\text{問題とする位置の入口からの距離 } L = 0.2 \text{ m}$$

$$\text{体積流量 } \nu = 50 \text{ dm}^3/\text{s} = 50 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{平均流速} \quad u_m = \frac{v}{\pi d^2/4} = \frac{(5.0 \times 10^{-2})}{(3.1416)(0.05)^2/4} = 25.46 \text{ m/s}$$

35°Cの水の動粘性係数

$$\nu = \frac{0.8008 + 0.6581}{2} \text{ mm}^2/\text{s} = 0.7295 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 7.295 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

35°Cの水の熱伝導率

$$\lambda = \frac{0.6150 + 0.6286}{2} \text{ W/(m K)} = 0.6218 \text{ W/(m K)}$$

35°Cの水のプラントル数

$$Pr = \frac{5.41 + 4.34}{2} = 4.88$$

35°Cの水の密度

$$\rho = \frac{995.6 + 992.3}{2} = 994.0 \text{ kg/m}^3$$

35°Cの水の比熱容量

$$c = \frac{4.180 + 4.179}{2} \text{ kJ/(kg K)} = 4.180 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$$

レイノルズ数は

$$Re_d = \frac{(25.46)(0.05)}{(7.295 \times 10^{-7})} = 1.745 \times 10^6$$

よって、ディットス・ベルターの式(式(4.168))を用い、加熱の場合なので指数に0.4を用いて、

$$Nu_d = 0.023 Re_d^{4/5} Pr^{0.4} = 0.023 (1.745 \times 10^6)^{4/5} (4.880)^{0.4} = 4.272 \times 10^3$$

熱伝達率は、

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.6218}{0.05} (4.272 \times 10^3) = 5.312 \times 10^4 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

求める温度を T_L とすれば、伝熱の駆動力となる温度差が徐々に位置とともに指数関数的に小さくなっていることを踏まえて、温度差には対数平均温度差を用いる必要がある(p79 参照)ので、伝熱量は、

$$\dot{Q} = -(\pi d L) h \frac{(T_L - T_w) - (T_0 - T_w)}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}} = -(\pi d L) h \frac{T_L - T_0}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}}$$

この伝熱量だけ温度が上昇するので

$$\dot{Q} = \rho v c (T_L - T_0)$$

これらが等しいことを使って、

$$-(\pi d L) h \frac{T_L - T_0}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}} = \rho v c (T_L - T_0)$$

$$(\pi d L) h \frac{1}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}} = -\rho v c$$

$$\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w} = -\frac{\pi d L h}{\rho v c}$$

$$\frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w} = \exp\left(-\frac{\pi d L h}{\rho v c}\right)$$

$$T_L - T_w = (T_0 - T_w) \exp\left(-\frac{\pi d L h}{\rho v c}\right)$$

$$T_L = T_w + (T_0 - T_w) \exp\left(-\frac{\pi d L h}{\rho v c}\right)$$

$$= 50 + (20 - 50) \exp\left(-\frac{(3.1416)(0.05)(0.2)(5.312 \times 10^4)}{(994.0)(5.0 \times 10^{-2})(4.180 \times 10^3)}\right) = 20.24^\circ\text{C}$$

この結果からは、代表温度は 20°C の方が妥当ではある。より正確な値を得るには、ここで得られた温度での物性値を用いて計算を繰り返す。

4.1.4 内径 10 cm、長さ 5 m の管内に常圧で入口温度 50°C の水を流す。水の平均流速は 50 mm/s であり、管壁は 70°C に加熱されている。加熱部出口における平均温度はいくらになるか。ただし、熱伝達率の計算にはディッタス・ベルターの式を用いよ。

解) 代表温度として、壁温と入口温度の平均値を用いる。

$$\text{壁温度 } T_w = 70^\circ\text{C}$$

$$\text{入口温度 } T_0 = 50^\circ\text{C}$$

$$\text{代表温度 } T = \frac{50 + 70}{2} = 60^\circ\text{C}$$

計算に必要な値を S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{管内径 } d = 0.10 \text{ m}$$

$$\text{管の長さ } L = 5 \text{ m}$$

$$\text{平均流速 } u_m = 50 \text{ mm/s} = 50 \times 10^{-3} \text{ m/s} = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

60°Cの水の動粘性係数

$$\nu = 0.4744 \text{ mm}^2/\text{s} = 0.4744 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 4.744 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

60°Cの水の熱伝導率

$$\lambda = 0.6508 \text{ W/(m K)}$$

60°Cの水のプラントル数

$$Pr = 2.99$$

60°Cの水の密度

$$\rho = 983.2 \text{ kg/m}^3$$

60°Cの水の比熱容量

$$c = 4.183 \text{ kJ/(kg K)} = 4.183 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$$

レイノルズ数は

$$Re_d = \frac{(25.46)(0.05)}{(7.295 \times 10^{-7})} = 1.054 \times 10^4$$

よって、ディットス・ベルターの式 (式(4.168)) を使い、加熱の場合なので指数に 0.4 を用いて、

$$Nu_d = 0.023 Re_d^{4/5} Pr^{0.4} = 0.023 (1.054 \times 10^4)^{4/5} (2.998)^{0.4} = 58.98$$

熱伝達率は、

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.6508}{0.10} (58.98) = 383.9 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

求める温度を T_L とすれば、伝熱の駆動力となる温度差が徐々に位置とともに指数関数的に小さくなっていることを踏まえて、温度差には対数平均温度差を用いる必要がある (p79 参照) ので、伝熱量は、

$$\dot{Q} = -(\pi d L) h \frac{(T_L - T_w) - (T_0 - T_w)}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}} = -(\pi d L) h \frac{T_L - T_0}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}}$$

この伝熱量だけ温度が上昇するので

$$\dot{Q} = \rho \frac{\pi d^2}{4} u_m c (T_L - T_0)$$

これらが等しいことを使って、

$$-(\pi d L) h \frac{T_L - T_0}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}} = \rho \frac{\pi d^2}{4} u_m c (T_L - T_0)$$

$$(\pi d L) h \frac{1}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}} = -\rho \frac{\pi d^2}{4} u_m c$$

$$\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w} = -\frac{4 L h}{\rho d u_m c}$$

$$\frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w} = \exp\left(-\frac{4 L h}{\rho d u_m c}\right)$$

$$T_L - T_w = (T_0 - T_w) \exp\left(-\frac{4 L h}{\rho d u_m c}\right)$$

$$T_L = T_w + (T_0 - T_w) \exp\left(-\frac{4 L h}{\rho d u_m c}\right)$$

$$= 70 + (50 - 70) \exp\left(-\frac{(4)(5)(383.9)}{(983.2)(0.1)(5.0 \times 10^{-2})(4.183 \times 10^3)}\right) = 56.23^\circ\text{C}$$

より正確な値を得るには、ここで得られた温度での物性値を用いて計算を繰り返す。

4.15 内径 20 mm の円管内に 50°C、0.1 MPa の水を流す。水の流速は 1 m/s であり、円管の内面温度は 80°C である。このときの平均熱伝達係数をディタス・ベルターの式とジャーター・テイトの式を用いて求めると、それぞれ、いくらになるか。

解)

代表温度として、壁温と入口温度の平均値を用いる。

$$\text{壁温度 } T_w = 80^\circ\text{C}$$

$$\text{入口温度 } T_0 = 50^\circ\text{C}$$

$$\text{代表温度} \quad T = \frac{50+80}{2} = 65^{\circ}\text{C}$$

計算に必要な値を S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{管内径} \quad d = 0.20 \text{ m}$$

$$\text{平均流速} \quad u_m = 1 \text{ cm/s} = 1 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

65°Cの水の動粘性係数

$$\nu = \frac{0.4744 + 0.4131}{2} \text{ mm}^2/\text{s} = 0.4438 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 4.438 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

65°Cの水の熱伝導率

$$\lambda = \frac{0.6508 + 0.6596}{2} \text{ W/(m K)} = 0.6552 \text{ W/(m K)}$$

65°Cの水のプラントル数

$$Pr = \frac{2.998 + 2.565}{2} = 2.782$$

70°Cの水の粘性係数

$$\mu_w = 0.4039 \text{ mPa s} = 4.039 \times 10^{-4} \text{ Pa s}$$

65°Cの水の動粘性係数

$$\mu = \frac{0.4664 + 0.4039}{2} \text{ mPa s} = 0.4352 \times 10^{-3} \text{ Pa s} = 4.352 \times 10^{-4} \text{ Pa s}$$

レイノルズ数は

$$Re_d = \frac{(0.01)(0.2)}{(4.438 \times 10^{-7})} = 4.507 \times 10^3$$

※本来は、両式とも適用範囲外なので望ましくないが、乱流領域でもあり、題意であるのでこのまま計算。

<ディットス・ベルターの式>

ディットス・ベルターの式 (式(4.168)) を用い、加熱の場合なので指数に 0.4 を用いて、

$$Nu_d = 0.023 Re_d^{4/5} Pr^{0.4} = 0.023 (4.507 \times 10^3)^{4/5} (2.782)^{0.4} = 29.01$$

熱伝達率は、

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.6552}{0.20} (29.01) = 95.0 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

<ジーター・テイトの式>

ディッタス・ベルターの式（式(4.168)）を用い、加熱の場合なので指数を 0.4 として、

$$\begin{aligned}Nu_d &= 0.027 Re_d^{4/5} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \\&= 0.027 (4.507 \times 10^3)^{4/5} (2.782)^{1/3} \left(\frac{4.352 \times 10^{-4}}{4.039 \times 10^{-4}} \right) = 32.13\end{aligned}$$

熱伝達率は、

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.6552}{0.020} (32.13) = 105 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

4.16 内径 20 mm、内壁温度 100℃の円管内に圧力 0.1 MPa の水を毎時 1,000 kg で流す。管入口で 40℃あった水温を管出口で 80℃に上昇させるためには、管長はいくら必要であるか。

解) 代表温度として、壁温 100℃と入口出口温度の平均値の間である 60℃の平均値を用いる。

$$\text{壁温度 } T_w = 100^\circ\text{C}$$

$$\text{入口温度 } T_0 = 40^\circ\text{C}$$

$$\text{出口温度 } T_L = 80^\circ\text{C}$$

$$\text{代表温度 } T = \frac{100 + 60}{2} = 80^\circ\text{C}$$

計算に必要な値を S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{管内径 } d = 0.02 \text{ m}$$

$$\text{質量流量 } w = 1,000 \text{ kg/h} = \frac{1000}{3600} \text{ kg/s} = 2.778 \times 10^{-1} \text{ kg/s}$$

$$80^\circ\text{Cの水の密度 } \rho = 971.8 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{平均流速} \quad u_m = \frac{w/\rho}{\pi d^2/4} = \frac{4w}{\pi d^2 \rho} = \frac{(4)(2.778 \times 10^{-1})}{(3.1416)(0.02)^2 (971.8)} = 9.099 \times 10^{-1} \text{ m/s}$$

$$80^\circ\text{Cの水の動粘性係数} \quad \nu = 0.3647 \text{ mm}^2/\text{s} = 0.3647 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 3.647 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$80^\circ\text{Cの水の熱伝導率} \quad \lambda = 0.6670 \text{ W/(m K)}$$

$$80^\circ\text{Cの水のプラントル数} \quad Pr = 2.229$$

$$60^\circ\text{Cの水の比熱容量} \quad c = 4.196 \text{ kJ/(kg K)} = 4.196 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$$

レイノルズ数は

$$Re_d = \frac{(9.099 \times 10^{-1})(0.02)}{(3.647 \times 10^{-7})} = 4.990 \times 10^4$$

よって、ディットス・ベルターの式 (式(4.168)) を用い、加熱の場合なので指数に 0.4 を用いて、

$$Nu_d = 0.023 Re_d^{4/5} Pr^{0.4} = 0.023 (4.990 \times 10^4)^{4/5} (2.229)^{0.4} = 181.7$$

熱伝達率は、

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.6670}{0.02} (181.7) = 6.061 \times 10^3 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

伝熱の駆動力となる温度差が徐々に位置とともに指数関数的に小さくなっていることを踏まえて、温度差には対数平均温度差を用いる必要がある (p79 参照) ので、伝熱量は、求め

る管の長さを L [m] として、

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -(\pi d L) h \frac{(T_L - T_w) - (T_0 - T_w)}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}} = -(\pi d L) h \frac{T_L - T_0}{\ln \frac{T_L - T_w}{T_0 - T_w}} \\ &= -(3.1416)(0.02)L(6.061 \times 10^3) \frac{(80 - 40)}{\ln \frac{(80 - 100)}{(40 - 100)}} = 1.386 \times 10^4 L \text{ [W]} \end{aligned}$$

一方、伝熱量は、1 kg/h の水を 40°C から 80°C まで加熱するのに必要な熱量でもあるので、

$$\dot{Q} = cw(T_L - T_0) = (4.196 \times 10^3)(2.778 \times 10^{-1})(80 - 40) = 4.662 \times 10^4 \text{ W}$$

よって

$$1.386 \times 10^4 L = 4.662 \times 10^4$$

を解いて、求める長さは

$$L = 3.36 \text{ m}$$

4.17 20℃の水が平均流速 $u_m = 1 \text{ m/s}$ で直径 $d = 20 \text{ mm}$ 、長さ $l = 10 \text{ m}$ の滑らかな円管内を流れている。このときの圧力損失と熱伝達率を求めよ。ただし、圧力損失の計算には以下の式を用い、熱伝達率の計算にはディットス・ベルターの式 ($n=0.4$ の場合) を用いよ。

$$\Delta p = C_f \frac{l}{d} \frac{\rho u_m^2}{2}$$

ここで、 l は管路長さ、 d は管直径、 ρ は流体密度、 u_m は平均流速、 C_f は摩擦抵抗係数である。

解) 計算に必要な値を S I 単位系の基本単位で表しておく。

管内径 $d = 0.02 \text{ m}$

管の長さ $l = 10 \text{ m}$

平均流速 $u_m = 1 \text{ m/s}$

20℃の水の密度 $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$

20℃の水の動粘性係数 $\nu = 1.004 \text{ mm}^2/\text{s} = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

20℃の水の熱伝導率 $\lambda = 0.5995 \text{ W/(mK)}$

20℃の水のプラントル数 $Pr = 6.991$

レイノルズ数は

$$Re_d = \frac{(1)(0.02)}{(1.004 \times 10^{-6})} = 1.992 \times 10^4$$

摩擦係数は教科書の式(4.158)を用いて、

$$C_f = 0.046 Re_d^{-0.2} = (0.046)(1.992 \times 10^4)^{-0.2} = 6.352 \times 10^{-3}$$

よって圧力損失は、

$$\begin{aligned} \Delta p &= C_f \frac{l}{d} \frac{\rho u_m^2}{2} = (6.352 \times 10^{-3}) \frac{10}{0.02} \frac{(998.2)(1)^2}{2} \\ &= 1.59 \times 10^3 \text{ Pa} = 1.59 \text{ kPa} \end{aligned}$$

また、ディットス・ベルターの式 (式(4.168)) を用い、加熱の場合なので指数を 0.4 とし、

$$Nu_d = 0.023 Re_d^{4/5} Pr^{0.4} = 0.023 (1.992 \times 10^4)^{4/5} (6.991)^{0.4} = 137.7$$

熱伝達率は、

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.5995}{0.02} (137.7) = 4.129 \times 10^3 \text{ W/(m}^2\text{K)} = 4.129 \text{ kW/(m}^2\text{K)}$$

4.18 直径 20 mm の円管内をスピンドル油が平均流速 1 m/s で流れている。この温度を入口の 80°C から 40°C まで冷却したい。冷却部では壁温を 20°C に保つとすれば、冷却部の長さはどれだけ必要か。ただし、ジーター・テイットの整理式を用いよ。

解) 代表温度として、壁温 20°C と入口出口温度の平均値の間である 60°C の平均値を用いる。

$$\text{壁温度 } T_w = 20^\circ\text{C}$$

$$\text{入口温度 } T_0 = 80^\circ\text{C}$$

$$\text{出口温度 } T_L = 40^\circ\text{C}$$

$$\text{代表温度 } T = \frac{20 + 60}{2} = 40^\circ\text{C}$$

計算に必要な値を S I 単位系の基本単位で表しておく。

$$\text{管内径 } d = 0.02 \text{ m}$$

$$\text{平均流速 } u_m = 1 \text{ m/s}$$

伝熱工学資料第 4 版 P326 より、

$$300 \text{ K のスピンドル油の動粘性係数 } \nu_{300} = 11.80 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$320 \text{ K のスピンドル油の動粘性係数 } \nu_{320} = 6.65 \text{ mm}^2/\text{s}$$

これより、40°C=313 K のスピンドル油の動粘性係数は

$$\nu = 11.80 + (6.65 - 11.80) \frac{313 - 300}{320 - 313} = 8.453 \text{ mm}^2/\text{s} = 8.453 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$300 \text{ K のスピンドル油のプラントル数 } Pr_{300} = 130$$

$$320 \text{ K のスピンドル油のプラントル数 } Pr_{320} = 78.2$$

これより、40°C=313 K のスピンドル油のプラントル数は

$$Pr = 130 + (78.2 - 130) \frac{313 - 300}{320 - 313} = 96.33$$

$$300 \text{ K のスピンドル油の熱伝導率 } \lambda_{300} = 0.144 \text{ W/(mK)}$$

$$320 \text{ K のスピンドル油の熱伝導率 } \lambda_{320} = 0.143 \text{ W/(mK)}$$

これより、40°C=313 K のスピンドル油の熱伝導率は

$$\lambda = 0.144 + (0.143 - 0.144) \frac{313 - 300}{320 - 313} = 0.1434 \text{ W/(m K)}$$

$$300 \text{ K のスピンドル油の密度 } \rho_{300} = 867 \text{ kg/m}^3$$

$$320 \text{ K のスピンドル油の密度 } \rho_{320} = 854 \text{ kg/m}^3$$

これより、40°C=313 K のスピンドル油の密度は

$$\rho = 867 + (854 - 867) \frac{313 - 300}{320 - 313} = 858.6 \text{ kg/m}^3$$

$$300 \text{ K のスピンドル油の比熱容量 } c_{300} = 1.880 \text{ kJ/(kg K)} = 1.880 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$$

$$320 \text{ K のスピンドル油の比熱容量 } c_{320} = 1.964 \text{ kJ/(kg K)} = 1.964 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$$

これより、40°C=313 K のスピンドル油の比熱容量は

$$c = 1.880 + (1.964 - 1.880) \frac{313 - 300}{320 - 313} \times 10^3 \text{ J/(kg K)} = 1.935 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$$

$$\text{質量流量 } w = u_m \frac{\pi d^2}{4} \rho = (1) \frac{(3.1416)(0.02)^2}{(4)} (858.6) \text{ kg/s} = 2.697 \times 10^{-1} \text{ kg/s}$$

レイノルズ数は

$$Re_d = \frac{(1)(0.02)}{(8.453 \times 10^{-6})} = 2.366 \times 10^3$$

乱流への遷移が起きるかどうかがぎりぎりのところだが、題意に従ってディッタス・ベルタ一の式 (式(4.168)) を用い、冷却の場合なので指数に 0.3 を用いて、

$$Nu_d = 0.023 Re_d^{4/5} Pr^{0.3} = 0.023 (2.366 \times 10^4)^{4/5} (0.9633)^{0.3} = 45.3$$

熱伝達率は、

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu_d = \frac{0.1434}{0.02} (45.3) = 324.7 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

伝熱の駆動力となる温度差が徐々に位置とともに指数関数的に小さくなっていることを踏まえて、温度差には対数平均温度差を用いる必要がある (p79 参照) ので、伝熱量は、求め

る管の長さを L [m] として、

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -(\pi d L) h \frac{(T_0 - T_w) - (T_L - T_w)}{\ln \frac{T_0 - T_w}{T_L - T_w}} = -(\pi d L) h \frac{T_0 - T_L}{\ln \frac{T_0 - T_w}{T_L - T_w}} \\ &= -(3.1416)(0.02)L(324.7) \frac{(80 - 40)}{\ln \frac{(80 - 20)}{(40 - 20)}} = -74.8 \text{ [W]} \end{aligned}$$

一方、伝熱量は、 $2.697 \times 10^{-1} \text{ kg/s}$ の水を 80°C から 40°C まで冷却するのに必要な熱量でも

あるで、

$$\dot{Q} = cw(T_L - T_0) = (1.935 \times 10^3) (2.697 \times 10^{-1}) (40 - 80) = -2.087 \times 10^4 \text{ W}$$

よって

$$-742.8L = -2.087 \times 10^4$$

を解いて、求める長さは

$$L = 28.1 \text{ m}$$