

<第2章 熱伝導>

2.1 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ 、 $z = z$ の座標変換によって式(2.13)を式(2.12)から導け。

解) 1 次微分を整理しておく。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ より}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x} \text{ より}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \frac{y}{r} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{x}{r} = \frac{\cos \theta}{r}$$

z と x 、 y は独立なので

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

これらより、

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r}\right) = \frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

もう 1 回 x について微分して、

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cos \theta + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta) - \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \right) \frac{\partial r}{\partial x} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \cos \theta + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) - \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cos \theta - \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\frac{-\sin \theta}{r^2} \right) \right) \cos \theta \\
&+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \cos \theta + \frac{\partial T}{\partial r} (-\sin \theta) - \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \right) \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) \\
&+ \left(-\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right)
\end{aligned}$$

また、

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

もう 1 回^yについて微分して、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \sin \theta + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta) + \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \right) \frac{\partial r}{\partial y} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \sin \theta + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta) + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \sin \theta + \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\frac{-\cos \theta}{r^2} \right) \right) \sin \theta \\
&+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \sin \theta + \frac{\partial T}{\partial r} (\cos \theta) + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\frac{-\sin \theta}{r} \right) \right) \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right)
\end{aligned}$$

よって、

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) \\
&+ \left(-\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) \\
&+ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

式(2.13)が導かれた。

2.2 厚さ 1 cm のステンレス鋼板の両側を 20℃と 30℃に保った時、得られる熱流束はいくらか。

解) ステンレスの熱伝導率は付録から、16.0 W/m K。式(2.30)より

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} = (16.0) \frac{30 - 20}{0.01} = 1.6 \times 10^4 \text{ W/m}^2 = 16 \text{ kW/m}^2$$

2.3 内半径 1 cm、厚さ 1 cm のステンレス鋼円筒の内側を 20℃、外側を 30℃に保った時、得られる外面での熱流束はいくらか。

解) 式(2.37)より、

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r_2} = (16.0) \frac{20 - 30}{\ln((0.01 + 0.01)/0.01)} \frac{1}{(0.01 + 0.01)} = -11.5 \times 10^3 \text{ W/m}^2 = -11.5 \text{ kW/m}^2$$

負号は、

図 2.10 の半径方向座標の逆向き、すなわち円管の外側から内側に熱が流れることを示す。

2.4 内半径 5 mm、外半径 15 mm の非常に長い厚肉の円管がある。この円管の内面温度を 80℃、外面温度を 0℃に保つとき、半径 10 mm の位置の温度はどれだけか。

解) 式(2.36)を用いる。

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2 / r_1)} \ln \frac{r}{r_1} = 80 - \frac{80 - 0}{\ln(15/5)} \ln \frac{10}{5} = 29.5^\circ\text{C}$$

2.5 内半径 1 cm、厚さ 1 cm のステンレス球殻の内側を 20℃、外側を 30℃に保った時、得られる外面での熱流束はいくらか。

解) 式(2.45)より、

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \frac{1}{r_2^2} = (16.0) \frac{20 - 30}{1/0.01 - 1/(0.01 + 0.01)} \frac{1}{(0.01 + 0.01)^2} = -8 \times 10^3 \text{ W/m}^2 = -8 \text{ kW/m}^2$$

負号

は、図 2.12 の半径方向座標の逆向き、すなわち球殻の外側から内側に熱が流れることを示す。

2.6 内半径 10 mm、外半径 30 mm の中空球の内面温度を 100℃、外面温度を 0℃に保つとき、半径 20 mm の位置の温度はどれだけか。

解) 式(2.44) を用いる。

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = 100 - \frac{100 - 0}{1/0.01 - 1/0.03} \left(\frac{1}{0.01} - \frac{1}{0.02} \right) = 25^\circ\text{C}$$

2.7 外半径 200 mm、内半径 100 mm の球殻がある。その外壁および内壁の表面温度をそれぞれ 50℃、300℃であるとする、外表面からの放熱量はいくらになるか。また、半径 150 mm での温度はいくらになるか。ただし、熱伝導率を 0.05 W/(m K)とする。

解) 放熱量は、式(2.46)を用いて求める。

$$Q = 4\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} = (4)(3.14)(0.05) \frac{300 - 50}{1/0.1 - 1/0.2} = 31.4 \text{ W}$$

半径 150 mm での温度は、式(2.44)を用いて求める

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = 300 - \frac{300 - 50}{1/0.1 - 1/0.2} \left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.15} \right) = 133^\circ\text{C}$$

2.8 厚さ 1 cm のステンレス鋼板の両側を 20°C に保ち、電流を流して 50 kW/m³ の発熱を行った場合、板内の最高温度は何°C になるか。

解) 付録から、ステンレスの熱伝導率は 16.0 W/(m K)、厚さ 1 cm より中心から表面までの距離は 0.005 m である。最高温度は板の中心部で得られるので、式(2.50)より、

$$T = T_1 + \frac{Q_v}{2\lambda} (x_1^2 - x^2) = 20 + \frac{50 \times 10^3}{2(16.0)} (0.005^2 - 0^2) = 20.04^\circ\text{C}$$

2.9 厚さ 1 cm のステンレス鋼板の両側を 20°C に保ちながら、放射線によって片側の面からの距離 x [m] の位置で $Q_v = 50 \exp(-0.3x)$ [W/m³] の発熱が生じている場合、板内の最高温度は何°C になるか。

解) 付録から、ステンレスの熱伝導率は 16.0 W/(m K)。

最高温度を示す位置は、式(2.62)より、

$$x_{\max} = \frac{-\ln \left[\frac{1 - e^{-\mu x_1}}{\mu x_1} + \frac{\lambda \mu (T_0 - T_1)}{Q_{v0} x_1} \right]}{\mu} = \frac{-\ln \left[\frac{1 - e^{-(0.3)(0.01)}}{(0.3)(0.01)} + \frac{(16.0)(0.3)(20 - 20)}{(50)(0.01)} \right]}{0.3} = 5.00 \times 10^{-3} \text{ m}$$

この位置での温度を求めればよいので、式(2.61)より、

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \frac{Q_{v0}}{\lambda \mu^2} \left[1 - e^{-\mu x} - \frac{x}{x_1} (1 - e^{-\mu x_1}) \right] - \frac{x}{x_1} (T_0 - T_1) \\ &= 20 + \frac{50}{(16)(0.3)^2} \left[1 - e^{-(0.3)(5.00 \times 10^{-3})} - \frac{5.00 \times 10^{-3}}{0.01} (1 - e^{-(0.3)(0.01)}) \right] - \frac{5.00 \times 10^{-3}}{0.01} (20 - 20) = 20 + 3.9 \times 10^{-5}^\circ\text{C} \end{aligned}$$

ほとんど無視できる。

2.10 非常に長い半径 R の円柱内部に、一様な発熱 Q_v がある。熱伝達率が λ 、円柱表面温度が 0°C のときの、円柱内部の温度分布を求めよ。

解) 式(2.55)より、半径位置 r の温度 T は、

$$T = \frac{Q_v}{4\lambda} (R^2 - r^2) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

ただし、 Q_v 、 λ 、 R 、 r は S I 単位系の基本単位で表すものとする。

2.1 1 直径 200 mm の丸棒の内部が一様に発熱している。単位体積あたりの発熱量が $2 \times 10^5 \text{ W/m}^3$ 、熱伝導率が 20 W/(m K) のとき、中心軸と表面の温度差を求めよ。

解) 半径は 0.1 m であることに注して、式(2.55)より、表面温度が T_1 [K] の時の中心温度は、

$$T_c = T_1 + \frac{2 \times 10^5}{(4)(20)} (0.1^2 - 0^2) = T_1 + 25$$

よって、中心軸と表面の温度差は 25°C 。

2.1 2 内半径 R_1 、外半径 R_2 の円管が一様に発熱している。単位体積あたりの発熱量を Q_v 、熱伝導率を λ とする。円管内面は断熱し、外面の温度を 0°C に保つとき、温度分布を求めよ。

解) 基礎方程式は式(2.52)であり、これを解いた解は式(2.53)である。境界条件は、

$$r = R_1: \frac{dT}{dr} = 0, \quad r = R_2: T = 0^{\circ}\text{C}$$

これに基づいて式(2.53)の積分定数を決定する。

式(2.53)を 1 回微分して、

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Q_v}{2\lambda} r + A \frac{1}{r}$$

$$r = R_1 \text{ で } \frac{dT}{dr} = 0 \text{ より、}$$

$$0 = -\frac{Q_v}{2\lambda} R_1 + A \frac{1}{R_1}$$

$$A = \frac{Q_v}{2\lambda} R_1^2$$

これを式(2.53)に代入して

$$T = -\frac{Q_v}{4\lambda} r^2 + \frac{Q_v}{2\lambda} R_1^2 \ln r + B$$

$$r = R_2 \text{ で } T = 0^{\circ}\text{C} \text{ より、}$$

$$0 = -\frac{Q_v}{4\lambda} R_2^2 + \frac{Q_v}{2\lambda} R_1^2 \ln R_2 + B$$

$$B = \frac{Q_v}{4\lambda} R_2^2 - \frac{Q_v}{2\lambda} R_1^2 \ln R_2$$

よって、

$$T = -\frac{Q_v}{4\lambda} r^2 + \frac{Q_v}{2\lambda} R_1^2 \ln r + \frac{Q_v}{4\lambda} R_2^2 - \frac{Q_v}{2\lambda} R_1^2 \ln R_2$$

$$T = -\frac{Q_v}{4\lambda} (r^2 - R_2^2) + \frac{Q_v}{2\lambda} R_1^2 \ln \frac{r}{R_2}$$

2.1 3 内半径 1 cm、厚さ 1 cm のステンレス鋼円筒の内側を 20℃、外側を 30℃の水が流れている。内側、外側の熱伝達率がそれぞれ 50 W/(m² K)、100 W/(m² K) の時、熱通過率はいくらか。また、熱通過量はいくらか。

解) 付録から、ステンレスの熱伝導率は 16.0 W/m K。ステンレス円筒の厚みは 0.01 m。円筒の内径は 0.01 m。式(2.61)より、

$$K = \left(\frac{1}{r_1 h_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{r_2 h_2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{(50)(0.01)} + \frac{1}{16.0} \ln \left(\frac{0.01 + 0.01}{0.01} \right) + \frac{1}{100(0.01 + 0.01)} \right)^{-1}$$

$$= 0.393 \text{ W/(m K)}$$

また、熱通過量は、式(2.69)より単位長さあたり、

$$Q = 2\pi L K (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) = (2)(3.14)(1)(0.393)(20 - 30) = -24.7 \text{ W}$$

負号は r 軸と反対側、すなわち球の外側から内側へ熱が伝わることを表す。

2.1 4 薄いヒーターの両面を厚さ 1.5 mm のゴム板で挟んだカーペットが厚さ 20mm の木製床板に敷かれている。室温は 20℃、床下の気温は-5℃であり、カーペット上面と床下板面における熱伝達率を共に 5W/(m²K)とする。ヒーターの発熱量が 100 W/m² のとき、カーペット上面温度はいくらか。

解) ヒータの温度を T_h [K] とする。

必要な値を S I 単位系の基本単位で表しておく。

付録から、ゴムの熱伝導率 $\lambda_r = 0.13 \text{ W/m K}$

同じく、木製床板の熱伝導率 $\lambda_w = 0.1 \text{ W/m K}$

ゴム板の厚み $l_r = 0.0015 \text{ m}$

木製床板の厚み $l_w = 0.02 \text{ m}$

上下の熱伝達率 $h = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$

上面側の空気温度 $T_{up} = 20 + 273.15 = 293.15 \text{ K}$

上面側の空気温度 $T_{down} = -5 + 273.15 = 268.15 \text{ K}$

カーペット上面側の熱流束は、

$$q_{up} = \left(\frac{1}{h} + \frac{l_r}{\lambda_r} \right)^{-1} (T_h - T_{up}) = \left(\frac{1}{5} + \frac{0.0015}{0.13} \right)^{-1} (T_h - 293.15) = 4.73(T_h - 293.15) \text{ [W/m}^2\text{]}$$

カーペット下面側の熱流束は、

$$q_{down} = \left(\frac{1}{h} + \frac{l_w}{\lambda_w} + \frac{l_r}{\lambda_r} \right)^{-1} (T_h - T_{down}) = \left(\frac{1}{5} + \frac{0.02}{0.1} + \frac{0.0015}{0.13} \right)^{-1} (T_h - 268.15) = 2.43(T_h - 268.15) \text{ [W/m}^2\text{]}$$

ヒータからの発熱は上面または下面にのみ伝わるので熱収支から、

$$q_{up} + q_{down} = 100 \text{ W/m}^2$$

よって、

$$4.73(T_h - 293.15) + 2.43(T_h - 268.15) = 100 \text{ W/m}^2$$

これを解いて、

$$T_h = 298.63 \text{ K} = 25.5^\circ\text{C}$$

カーペット上面温度を T_c とすれば、ヒータ上面の熱流束について、

$$q_{up} = 4.73(T_h - 293.15) = h(T_c - T_{up})$$

より、

$$4.73(298.63 - 293.15) = 5(T_c - 293.15)$$

これを解いて

$$T_c = 298.33 \text{ K} = 25.2^\circ\text{C}$$

2.1 5 表面温度 130°C 、厚さ 5 mm の鉄板があり、それに厚さ 50 mm のグラスウールを取り付け断熱した。断熱材外側は 20°C の外気温度にさらされている。断熱材から外気への熱伝達率を $10 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ とすると単位面積当り鉄板を通る熱量はいくらになるか。また、断熱材側の鉄板温度はいくらか。

解) 教科書の式(2.66)を応用する。断熱材と反対側の鉄板表面温度は 130°C 。この面から断熱材側に向かって、 5 mm の鉄板 (p198 の付表 2 より熱伝導率は 80.3 W/(m K))、 50 mm の断熱材 (熱伝導率はほぼ空気と等しいとして、やはり p198 の付表 2 より熱伝導率は 0.0261 W/(m K))、 $10 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ の熱伝達が局所熱抵抗として直列に並んでいる。よって、

$$\frac{1}{K} = \frac{0.005}{80.3} + \frac{0.05}{0.0261} + \frac{1}{10} = 19.26 \text{ m}^2\text{K/W}$$

$$K = 0.05193 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

よって熱流束は、

$$q = (0.05193)(130 - 20) = 5.712 \text{ W/m}^2$$

また、この熱流束はどの部分についても等しいので、断熱材側の表面温度を $T[^\circ\text{C}]$ として鉄の部分について

$$q = \frac{80.3}{0.005}(130 - T) = 5.712 \text{ W/m}^2$$

これを解いて

$$T = 129.9996^\circ\text{C}$$

2.16 20℃の室内空気と-10℃の外気が厚さ 3 mmのガラス窓で仕切られている。室内空気および外気による熱伝達率を 5.0 W/(m² K)とした場合、室内から外気への熱損失は単位時間単位面積あたりいくらか。また、ガラス窓の外側に厚さ 0.5 mmのアルミ製の雨戸を取り付けた場合ではいくらになるか。ただし、ガラス窓と雨戸の間の熱コンダクタンスは、単位面積当り 1.5 W/(m² K)とする。

解) ガラス窓だけの場合は、式(2.65)を用いて熱通過率 K_1 [W/(m²K)] を計算する。伝熱工学資料 (教科書 p195 で紹介) から、ガラスの熱伝導率は 1.03 W/(m K)

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{5} + \frac{0.003}{1.03} + \frac{1}{5} = 0.403 \text{ m}^2\text{K/W}$$

$$K_1 = 2.482 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

よって、求める単位時間単位面積あたりの熱損失 (熱流束) q_1 [W/m²] は、

$$q_1 = (2.482)(20 - (-10)) = 74.5 \text{ W/m}^2$$

アルミの雨戸をした場合には、式(2.66)と同様に考えて熱通過率 K_2 [W/(m²K)] を求める。ただし、熱伝達率に相当する熱コンダクタンスが熱伝導の間に含まれることに注意する。また、アルミの熱伝導率は p198 の附表 2 より 203 W/(m K)。熱抵抗は局所熱抵抗の和なので、

$$\frac{1}{K_2} = \frac{1}{5} + \frac{0.0005}{203} + \frac{1}{1.5} + \frac{0.003}{1.03} + \frac{1}{5} = 1.070 \text{ m}^2\text{K/W}$$

$$K_2 = 0.9349 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

よって、求める単位時間単位面積あたりの熱損失 (熱流束) q_2 [W/m²] は、

$$q_2 = (0.9349)(20 - (-10)) = 28.0 \text{ W/m}^2$$

2.17 1 m 四方の伝熱面に幅 1 cm、長さ 10 cm、高さ 10 cm の銅製のフィン設けた。フィン表面の熱伝達率が 30 W/(m² K)の時、フィン効率はいくらか。

解) 式(2.89)を用いる。

銅の熱伝導率は 398 W/(m K)、断面積は(0.1)(0.01)=0.001 m²、周囲長は(0.01+0.1)(2)=0.22 m、フィン表面の熱伝達率が 30 W/(m² K) より、式(2.78)で定義される m の値は、

$$m = \sqrt{\frac{(30)(0.22)}{(398)(0.001)}} = 14.8 \text{ m}^{-1}$$

フィンの高さは 0.1 m なので、式(2.89)からフィン効率 η は、

$$\eta = \frac{\tanh[(14.8)(0.1)]}{(14.8)(0.1)} = 0.608$$

2.18 直径 30mm、長さ 100mm の銅製の棒状フィンがある。フィンの根元は 300℃に保たれ、周囲の温度は 50℃であり表面の熱伝達率が 25 W/(m² K)であるとする。フィンから放熱される熱量とフィン効率を求めよ。ただし、フィン先端での放熱は無視してよい。

解) 式(2.89)を用いる。

銅の熱伝導率は 398 W/(m K)、断面積は(3.14)(0.03)²/4=7.07×10⁻⁴ m²、周囲長は(3.14)(0.03)=9.43×10⁻² m、フィン表面の熱伝達率が 25 W/(m² K) より、式(2.78)で定義される m の値は、

$$m = \sqrt{\frac{(25)(9.43 \times 10^{-2})}{(398)(7.07 \times 10^{-4})}} = 2.89 \text{ m}^{-1}$$

フィンの高さは 0.1 m なので、式(2.89)からフィン効率 η は、

$$\eta = \frac{\tanh[(2.89)(0.1)]}{(2.89)(0.1)} = 0.97$$

フィン全体が根元の温度 300℃である時の放熱量は、

$$Q_{ideal} = (25)(9.43 \times 10^{-2})(0.1)(300 - 50) = 58.9 \text{ W}$$

よって、フィンからの放熱量は

$$Q = \eta Q_{ideal} = (0.97)(58.9) = 57.3 \text{ W}$$

2.19 2次元の幅 10 cm の半無限平板 ($0 \text{ cm} \leq x < \infty$, $0 \text{ cm} \leq y \leq 10 \text{ cm}$) で、 $y = 0 \text{ cm}$ と $y = 10 \text{ cm}$

での温度が 0°C 、 $x = 0 \text{ cm}$ での温度分布が $T(y) = y(10 - y)$ であるとき、平板の温度分布 $T(x, y)$ を求めよ。

解) 式(2.111)を利用する。式の導出時とこの問題で x, y の記号の使い方が逆になっていることに注意して、S I 単位系の基本単位での表現を行うと、

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{0.1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \int_0^{0.1} y(0.1 - y) \sin \frac{n\pi}{0.1} y dy \right\} \exp\left(-\frac{n\pi}{0.1} x\right) \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right] \\ &= 20 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \int_0^{0.1} \left(0.1y \sin \frac{n\pi}{0.1} y - y^2 \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right) dy \right\} \exp\left(-\frac{n\pi}{0.1} x\right) \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right] \end{aligned}$$

今、 $\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x - \sin x$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx = x^2(-\cos x) + 2 \int x \cos x dx \\ &= x^2(-\cos x) + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) = x^2(-\cos x) + 2(x \sin x + \cos x) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \end{aligned}$$

を用いて積分の部分解くと、

$$\begin{aligned} &\int_0^{0.1} \left(0.1y \sin \frac{n\pi}{0.1} y - y^2 \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right) dy \\ &= \int_0^{0.1} \left(0.1y \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right) dy - \int_0^{0.1} \left(y^2 \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right) dy \\ &= \frac{0.01}{n\pi} \int_0^{0.1} \left(\frac{n\pi}{0.1} y \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right) dy - \frac{0.01}{n^2 \pi^2} \int_0^{0.1} \left\{ \left(\frac{n\pi}{0.1} y \right)^2 \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right\} dy \\ &= \frac{0.01}{n\pi} \frac{0.1}{n\pi} \left[-\frac{n\pi}{0.1} y \cos \frac{n\pi}{0.1} y + \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right]_0^{0.1} \\ &\quad - \frac{0.01}{n^2 \pi^2} \frac{0.1}{n\pi} \left[-\left(\frac{n\pi}{0.1} y \right)^2 \cos \frac{n\pi}{0.1} y + 2 \frac{n\pi}{0.1} y \sin \frac{n\pi}{0.1} y + 2 \cos \frac{n\pi}{0.1} y \right]_0^{0.1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0.001}{(n\pi)^2} \left\{ \left(-\frac{n\pi}{0.1} \cos \frac{n\pi}{0.1} - \sin \frac{n\pi}{0.1} \right) - \left(-\frac{n\pi}{0.1} \cos \frac{n\pi}{0.1} - \sin \frac{n\pi}{0.1} \right) \right\} \\
&- \frac{0.001}{(n\pi)^3} \left\{ \left(-\left(\frac{n\pi}{0.1} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{0.1} + 2 \frac{n\pi}{0.1} \sin \frac{n\pi}{0.1} + 2 \cos \frac{n\pi}{0.1} \right) \right. \\
&- \left. \left(-\left(\frac{n\pi}{0.1} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{0.1} + 2 \frac{n\pi}{0.1} \sin \frac{n\pi}{0.1} + 2 \cos \frac{n\pi}{0.1} \right) \right\} \\
&= \frac{0.001}{(n\pi)^2} \{ (-n\pi \cos n\pi - 0) - (0 - 0) \} \\
&- \frac{0.001}{(n\pi)^3} \{ (- (n\pi)^2 \cos n\pi + 2n\pi(0) + 2 \cos n\pi) - (-0 + 0 + 2) \} \\
&= \frac{0.001}{(n\pi)^2} (-n\pi \cos n\pi) - \frac{0.001}{(n\pi)^3} \{ (- (n\pi)^2 \cos n\pi + 2 \cos n\pi) - 2 \} \\
&= \frac{0.001}{(n\pi)^3} \{ (- (n\pi)^2 \cos n\pi) \} - \frac{0.001}{(n\pi)^3} \{ (- (n\pi)^2 \cos n\pi + 2 \cos n\pi - 2) \} \\
&= \frac{0.001}{(n\pi)^3} \{ (- (n\pi)^2 \cos n\pi + (n\pi)^2 \cos n\pi - 2 \cos n\pi + 2) \} \\
&= \frac{0.001}{(n\pi)^3} (-2 \cos n\pi + 2) \\
&= \frac{0.002}{(n\pi)^3} (1 - \cos n\pi)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
T &= 20 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{0.002}{(n\pi)^3} (1 - \cos n\pi) \right\} \exp \left(-\frac{n\pi}{0.1} x \right) \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right] \\
&= 0.04 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{1}{(n\pi)^3} (1 - \cos n\pi) \right\} \exp \left(-\frac{n\pi}{0.1} x \right) \sin \frac{n\pi}{0.1} y \right]
\end{aligned}$$

$n=7$ まで取って $x=0.01$ m まで計算した結果は以下の通り。

x [m]	y [m]										
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0	0.00000	0.00090	0.00160	0.00210	0.00240	0.00250	0.00240	0.00210	0.00160	0.00090	0.00000
0.001	0.00000	0.00087	0.00155	0.00203	0.00233	0.00242	0.00233	0.00203	0.00155	0.00087	0.00000

0.002	0.00000	0.00083	0.00149	0.00197	0.00226	0.00235	0.00226	0.00197	0.00149	0.00083	0.00000
0.003	0.00000	0.00080	0.00144	0.00191	0.00219	0.00229	0.00219	0.00191	0.00144	0.00080	0.00000
0.004	0.00000	0.00077	0.00140	0.00185	0.00213	0.00222	0.00213	0.00185	0.00140	0.00077	0.00000
0.005	0.00000	0.00074	0.00135	0.00179	0.00206	0.00215	0.00206	0.00179	0.00135	0.00074	0.00000
0.006	0.00000	0.00071	0.00131	0.00174	0.00200	0.00209	0.00200	0.00174	0.00131	0.00071	0.00000
0.007	0.00000	0.00069	0.00126	0.00168	0.00194	0.00203	0.00194	0.00168	0.00126	0.00069	0.00000
0.008	0.00000	0.00066	0.00122	0.00163	0.00188	0.00197	0.00188	0.00163	0.00122	0.00066	0.00000
0.009	0.00000	0.00064	0.00118	0.00158	0.00183	0.00191	0.00183	0.00158	0.00118	0.00064	0.00000
0.01	0.00000	0.00062	0.00114	0.00153	0.00177	0.00185	0.00177	0.00153	0.00114	0.00062	0.00000

別解) 教科書 2.9 節に示した数値解法によって解く。時間発展的に解いて、変化がなくなったところで収束と判断する。無限の長さは取れないので、十分に長い距離として 0.1 m を取る。

プログラムを以下に示す。

```

program heat2d

c    2007.6.11 Y.Matsumura
c    2D calculation of heat conduction

real tp(101,11), dtp(1001,11)

dx=0.001
dy=0.01
dtm=0.0000001
alpha=1.0

do 10 i=1,101
    tp(i,1)=0
    tp(i,11)=0
10 continue

do 20 i=1,11
    y=dy*(i-1)
    tp(1,i)=y*(0.1-y)
20 continue

do 30 i=2,101
    do 40 j=2,10
        tp(i,j)=0
40    continue
30    continue

50 continue

iteration=iteration+1
s=0
do 60 i=2,100
    do 70 j=2,10
        if (iteration.eq.43) then
            if (i.eq.43) then
                if (j.eq.3) then
                    write (*,*) 'a',i,j,tp(i,j), alpha, dx, dy
                    write (*,*) 'b',tp(i-1,j),tp(i+1,j),tp(i,j-1),tp(i,j+1)
                    write (*,*) 'c',alpha*dtm/dx/dx, alpha*dtm/dy/dy
                    write (*,*) 'd',tp(i-1,j)-2*tp(i,j)+tp(i+1,j)
                    write (*,*) 'e',tp(i,j-1)-2*tp(i,j)+tp(i,j+1)
                end if
            end if
        end if
        dtp(i,j)=alpha*dtm/dx/dx
+         *(tp(i-1,j)-2*tp(i,j)+tp(i+1,j))
+         +alpha*dtm/dy/dy
+         *(tp(i,j-1)-2*tp(i,j)+tp(i,j+1))
        s=s+abs(dtp(i,j))
70    continue
60 continue

c    write (*,*) 's=',s
c    read (*,*) x
    if (s.lt.1e-6) goto 200

```

```

do 80 i=2,100
  do 90 j=2,10
    tp(i,j)=tp(i,j)+dtp(i,j)
    if (tp(i,j).lt.1e-30) tp(i,j)=0
90  continue
80  continue

z=mod(iteration, 300)
if (z.eq.0) then
write (*,*) iteration
do 190 i=1,11
  write (*,220) (tp(i,j), j=1,11)
190 continue
end if

goto 50

200 continue

open (3, file='output.dat', status='new')
do 210 i=1,11
  write (*,220) (tp(i,j), j=1,11)
  write (3,220) (tp(i,j), j=1,11)
220  format (11f10.5)
210 continue

close (3)

stop
end

```

結果は以下の通り。解析解と同じ結果が得られている。

.00000	.00090	.00160	.00210	.00240	.00250	.00240	.00210	.00160	.00090	.00000
.00000	.00086	.00155	.00203	.00233	.00243	.00233	.00203	.00155	.00086	.00000
.00000	.00083	.00149	.00197	.00226	.00235	.00226	.00197	.00149	.00083	.00000
.00000	.00080	.00144	.00191	.00219	.00228	.00219	.00191	.00144	.00080	.00000
.00000	.00077	.00140	.00185	.00212	.00222	.00212	.00185	.00140	.00077	.00000
.00000	.00074	.00135	.00179	.00206	.00215	.00206	.00179	.00135	.00074	.00000
.00000	.00071	.00130	.00174	.00200	.00209	.00200	.00174	.00130	.00071	.00000
.00000	.00069	.00126	.00168	.00194	.00202	.00194	.00168	.00126	.00069	.00000
.00000	.00066	.00122	.00163	.00188	.00196	.00188	.00163	.00122	.00066	.00000
.00000	.00064	.00118	.00158	.00182	.00190	.00182	.00158	.00118	.00064	.00000
.00000	.00062	.00114	.00153	.00177	.00185	.00177	.00153	.00114	.00062	.00000

2.20 厚さ 5 cm で無限に広い 30℃のステンレス鋼板の一方の面が突然 10℃に冷却された場合に、1 分後のその面から 1 cm の位置の温度を求めよ。

解) 式(2.148)を使う。ただし、伝熱の方向が加熱ではなく冷却なので、式は

$$T_i - T = (T_i - T_0) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$$

となる。

ステンレスの温度伝導率は、熱伝導率、密度、比熱がそれぞれ 16.0 W/(m K)、7900 kg/m³、460 J/(kg K) なので、

$$\alpha = \frac{(16.0)}{(7900)(460)} = 4.40 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

また、題意より

$$T_i = 30^\circ\text{C}$$

$$T_0 = 10^\circ\text{C}$$

$$x = 0.1 \text{ m}$$

$$t = 60 \text{ s}$$

よって求める温度 T について、

$$\theta = T_i - T = (30 - 10) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) = (30 - 10) \operatorname{erfc} \left(\frac{0.1}{2\sqrt{(4.40 \times 10^{-6})(60)}} \right) = -13.27^\circ\text{C}$$

$$T = T_i + \theta = 30 + (-13.27) = 16.73^\circ\text{C}$$